ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι
26/2/1999

Θέμα 1. Εστω $f : X \to Y$ C^∞-απεικόνιση. Να οριστεί το σημειακό διαφορικό της f στο $x \in X$ και να αποδειχθεί ότι είναι μία καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση.

Θέμα 2. (α) Εστω X διαφορική πολλαπλότητα και $x \in X$. Αν $v = [(\alpha, x)] \in T(X, x)$, να δείξετε ότι $\dot{\alpha}(0) = v$.

(β) Στη σφαίρα S^2 δίνονται οι καμπύλες

$$\alpha(t) := (\eta\mu t, 0, \sigma\upsilon\nu t), \quad \beta(t) := (0, \eta\mu t, \sigma\upsilon\nu t), \quad t \in (-\pi, \pi)$$

και το σημείο $p = (0, 0, 1)$. Αν $u = [(\alpha, p)]$, $v = [(\beta, p)]$ είναι τα αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο p, να βρεθεί μία καμπύλη που υλοποιεί το εφαπτόμενο διάννυσμα $2u - v$.

Θέμα 3. Εστω $\xi \in \mathcal{L}(G)$, όπου G ομάδα Lie.

(α) Αν $\alpha : R \to G$ είναι η ολοκληρωτική καμπύλη του ξ με $\alpha(0) = e$, να αποδειχθεί ότι η ροή του ξ δίνεται από τη σχέση $\varphi(t, x) = x\alpha(t)$, $t \in R$.

(β) Να δείξετε ότι κάθε $\xi \in \mathcal{L}(G)$ είναι πλήρως γνωστό, αν γνωρίζουμε το $\xi_g \equiv \xi(g)$, γιά κάποιο $g \in G$ με $g \neq e$.

Θέμα 4. Εστω $\phi : R^3 \to R^3 : (x, y, z) \mapsto \lambda \cdot (x, y, z) + (\alpha, \beta, \gamma)$, με $\lambda \in R_*$ και $(\alpha, \beta, \gamma) \in R^3$ σταθερό. Να δείξετε ότι

(α) Το (R^3, ϕ) αποτελεί χάρτη της διαφορικής δομής του R^3.

(β) Αν $\frac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, 2, 3)$ είναι τα βασικά διανυσματικά πεδία του R^3 ως προς τον προηγούμενο χάρτη, να υπολογιστούν τα $\frac{\partial}{\partial x_i}(f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ γιά την συνάρτηση $f : R^3 \to R : (x, y, z) \mapsto x^2 + yz$.

Θέμα 5. (α) Εστω $(X, \mathcal{A})$ C^∞-πολλαπλότητα και $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Να αποδείξετε ότι η ϕ είναι αμφιδιαφόριστη.

(β) Αν η X είναι πολλαπλότητα Hausdorff, να αποδείξετε ότι γιά δύο οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία x, y υπάρχουν χάρτες (U, ϕ), (V, ψ) με $x \in U$, $y \in V$ και $U \cap V = \emptyset$.

(γ) Αν ∂_t είναι το βασικό διανυσματικό πεδίο του R, να αποδείξετε ότι $\partial_t(f) = \frac{df}{dt} = f'$ γιά οποιαδήποτε $f \in C^\infty(R, R)$.

(δ) Να υπολογιστούν οι ολοκληρωτικές καμπύλες του ∂_t.

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΘΕΜΑΤΑ