Διαφορική Γεωμετρία Ι
20-6-2001

Θέμα 1. α) Έστω $X \neq \emptyset$ και $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ διαφορικοί άτλαντες του X. Δώσατε τον ορισμό των διαφορικά συμβιβαστών ατλάντων. Να δειχθεί ότι οι άτλαντες $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ είναι διαφορικά συμβιβαστοί τότε και μόνον τότε αν κάθε χάρτης του $\mathcal{A}$ είναι διαφορικά συσχετισμένος με κάθε χάρτη του $\mathcal{B}$. Τι καλείται μέγιστος και τι πλήρης διαφορικός άτλας;

β) Να δειχθεί ότι η σφαίρα:

$$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\}$$

αποτελεί διαφορική πολλαπλότητα διαστάσεως 2.

Θέμα 2. Έστω X διαφορική πολλαπλότητα διαστάσεως n, $x\in X$ και (U,φ) χάρτης του X με $x\in U$. Να ορισθεί η απεικόνιση Φ και να αποδειχθεί ότι είναι καλά ορισμένη, 1-1 και επί.
Αν και (V,ψ) χάρτης του X με $x\in V$, να δειχθεί ότι: $D(\psi\circ\varphi^{-1}) = \Psi\circ\Phi^{-1}$.
Ποια η σημασία αυτής $\varphi(x)$ της σχέσεως;

Θέμα 3. Έστω ξ διανυσματικό πεδίο του X. Να δειχθεί ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

① Το ξ είναι διαφορίσιμο στο $x \in X$.

② $\exists$ χάρτης (U, φ) του X με $x \in U$: $\xi_i = \xi(x_i)$ είναι διαφορίσιμες στο x, $\forall\, i = 1, \ldots, n$, όπου $n = \dim X$.

③ $\xi(f) \in C^\infty_x(X)$, $\forall\, f \in C^\infty_x(X)$

Θέμα 4 α) Έστω $f \in C^\infty(X, Y)$. Τότε τα διανυσματικά πεδία ξ και η είναι f-συσχετισμένα $\Longleftrightarrow$
$\xi(g \circ f) = \eta(g) \circ f$, $\forall\, g \in C^\infty_{f(x)}(Y)$, $\forall x \in$

β) Να ορισθεί το διαφορικό $(df)_x$ μιας διαφορίσιμης απεικόνισης $f : X \to Y$ και να δειχθεί ότι είναι γραμμική απεικόνιση.

Θέμα 5. Να δειχθεί ότι:
$T(G, e) \cong \mathcal{L}(G)$

Να γραφούν 4 από τα 5 Θέματα
Καλή επιτυχία