ΙΟΥΝΙΟΣ 2003

Θέμα 1^o: Είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις; Αιτιολογήστε.

Α) Αν το δεύτερο κάθετο διάνυσμα μιας κανονικής (ομαλής) καμπύλης στο χώρο είναι σταθερό, τότε η καμπύλη είναι επίπεδη.

Β) Αν μια επίπεδη καμπύλη έχει θετική καμπυλότητα, τότε αυτή είναι τμήμα κύκλου.

Γ) Υπάρχει παραμετρική επιφάνεια με συνιστώσες της πρώτης θεμελιώδους μορφής

$$E=e^{4u}, F=4e^{2u}, G=2$$

Δ) Η εξίσωση $x^3+xyz+z^3=1$ παριστάνει ομαλή (κανονική) επιφάνεια.

Θέμα 2^o: Δίνεται η απεικόνιση $\gamma:\Re \to \Re^3$ με τύπο $\gamma(t)=(4\cos t, 3t, 4\sin t)$

α) Να αποδείξετε ότι η γ παριστά μια ομαλή (κανονική) καμπύλη, την οποία να αναπαραστήσετε με το μήκος τόξου.

β) Να βρείτε την καμπυλότητα και την στρέψη της καμπύλης.

γ) Να δείξετε ότι η καμπύλη διέρχεται από το σημείο Α(4,0,0) και να βρείτε την εξίσωση του εγγυτάτου επιπέδου της καμπύλης στο Α

Θέμα 3^o: Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια

$X(u,v)=((2+\cos v)\cos u, (2+\cos v)\sin u, \sin v)$ $0<u<2\pi$, $0<v<2\pi$.

α) Να υπολογίσετε τις συνιστώσες (θεμελιώδη μεγέθη) της πρώτης θεμελιώδους μορφής

β) Αν $\alpha(t)=X(u(t),v(t))$, $t\in[0,1]$ να βρείτε τον τύπο για το μήκος της α.

γ) Να βρείτε τις τιμές των u,v για τις οποίες η καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας στο X(u,v) μηδενίζεται.

Θέμα 4^o: Να απαντήσετε σε δύο από τα παρακάτω ερωτήματα.

α) Εάν οι εφαπτόμενες μιας επίπεδης καμπύλης διέρχονται από σταθερό σημείο, τότε αυτή είναι τμήμα ευθείας.

β) Έστω S ομαλή (κανονική) επιφάνεια που διέρχεται από το σημείο 0(0,0,0) και έστω ότι το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο 0 είναι το x0y. Αν οι κύριες καμπυλότητες της S στο 0 είναι $k_1=-1, k_2=3$ και οι αντίστοιχες κύριες διευθύνσεις είναι $w_1=(1,0,0)$, $w_2=(0,1,0)$, να βρείτε την καμπυλότητα στο 0 της καμπύλης που προκύπτει από την τομή της S με το επίπεδο x=y του $\Re^3$ (Υπόδειξη, τύπος Euler)

γ) Αν σε μια παραμετρική επιφάνεια $X:\Re^2 \to \Re^3$ το αντίστοιχο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα N είναι σταθερό, να δείξετε ότι αυτή αποτελεί τμήμα επιπέδου

δ) Να δείξετε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις

$x(u,v)=2\cos u\cos v$, $y(u,v)=2\cos u\sin v$, $z(u,v)=3\sin u$ παριστάνει τμήμα της επιφάνειας S με εξίσωση $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$. Ακολούθως να βρεθεί το εμβαδόν της S.

ε) Έστω $\gamma:\Re \to \Re^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με φυσικές εξισώσεις $k(s)=e^s$, $\tau(s)=1$. Αν $<T,n,b>$ είναι το τρίεδρο Fernet της γ και $T(0)=e_1, n(0)=e_2, b(0)=e_3$ να βρείτε το διάνυσμα της $n''(0)$

στ) Έστω S μια επιφάνεια, $p\in S$, $u\in T_p S$[$\equiv$εφαπτόμενο επίπεδο της S στο p]. Δίνονται δύο παραμετρήσεις της S γύρω από το p. Να βρείτε τον τύπο που συνδέει τις συνιστώσες του u ως προς κάθε μια από τις βάσεις του $T_p S$, που ορίζουν αυτές οι δύο παραμετρήσεις.

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΚΑΙ ΣΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ