ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΠΙΦΝΕΙΩΝ

ΙΟΥΝΙΟΣ 2004

Θέμα 1ο:

(Α) Να εξετάσετε αν υπάρχει ομαλή (κανονική) καμπύλη $\gamma(s)$ στο χώρο, μοναδιαίας ταχύτητας και θετικής καμπυλότητας, της οποίας όλες οι δεύτερες κάθετες (δηλ. ευθείες που διέρχονται από το $\gamma(s)$ και είναι παράλληλες προς το $b(s)$) διέρχονται από το ίδιο (σταθερό) σημείο. (Β) Να βρεθεί η εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου της καμπύλης $a(t)=(3t-t^3,3t^2,3t+t^3)$ σημείο $a(1)$

Θέμα 2ο:

Έστω $\gamma: R \to R^3$ ομαλή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας, με τρίεδρο Frenet $\{T,n,b\}$, καμπυλότητας k και στρέψης r. (Α) Να δείξετε πλήρως ότι $n'(s)=-n(s)T(s)+r(s)b(s)$. (Β) Δικαιλογείστε ότι υπάρχει καμπύλη όπως η γ, τέτοια ώστε $r(s)=e^s, r(s)=2e^s$. (Γ) Αν γ η καμπύλη του ερωτήματος (β), να βρείτε όλα τα $s \in R$, για τα οποία ισχύει η σχέση $n''(s)=n'(s)-10n(s)$.

Θέμα 3ο:

Έστω $S=\{(x,y,z)\in R^3 / z=x^2+y^2; x,y\in R\}$ και η απεικόνιση $f:R^2 \to R^3:(x,y)\mapsto (x,y,x^2+y^2)$. (Α) Να δείξετε ότι η f ορίζει μία παραμέτρηση (τοπικό σύστημα συντεταγμένων) της S. (Β) Να υπολογιστούν τα θεμελιώδη μεγέθη E,F,G της δ. (Γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τμήματος της S κάτω από το επίπεδο $z=1$. (Δ) Να υπολογιστεί η καμπυλότητα Gauss της S στο σημείο $(0,0,0)$

Θέμα 4ο:

Να απαντήσετε σε ένα μόνο από τα επόμενα ερωτήματα: (Α) Να δείξετε ότι το σύνολο $S=\{(x,y,z)\in R^3 : xy+xz-zy+y^2=2\}$ είναι ομαλή επιφάνεια και να βρείτε μία ομαλή παραμέτρηση (τοπικό σύστημα συντεταγμένων) σε μία περιοχή του σημείου $P=(1,1,-1)$ της S. (Β) Δίνεται η καμπύλη $\beta(t)=(at,bt,t^3)$, όπου a,b σταθερές στο R που ικανοποιούν τις συνθήκες $4b^4=9a^2$ και $a,b\neq 0$. Να εξετάσετε αν ισχύει η σχέση $r/k=$σταθερά. (Γ) Έστω η εκ περιστροφής επιφάνεια της σπείρας (torus) με παραμετρική παράσταση $\vec{x}(u,\upsilon)=[(r_o+r\cos\upsilon)\cos u,(r_o+r\cos\upsilon)\sin u, r\sin\upsilon]$. Να υπολογιστούν τα θεμελιώδη μεγέθη E,F,G καθώς και η καμπυλότητα Gauss. Σε ποια σημεία η καμπυλότητα είναι θετική, μηδέν ή αρνητική; Επίσης, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της σπείρας. (Δ) Θεωρούμε τις παραμετρήσεις $\varphi(u,\upsilon)=(u,\upsilon,\sqrt{1-u^2-\upsilon^2}),\psi(t,s)=(\sqrt{1-t^2-s^2},t,s)$, όπου $u^2+\upsilon^2<1$ και $t^2+s^2<1$. ι) Να δείξετε ότι $\mathrm{Im}(\phi),\mathrm{Im}(\psi)$ περιέχονται στη μοναδιαία σφαίρα S^2. ιι) Να υπολογιστεί το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στα σημεία της επιφάνειας, που αντιστοιχούν στην παραμέτρηση φ. ιιι) Αν $W=\mathrm{Im}(\varphi)\cap \mathrm{Im}(\psi)$, να ορίσετε την αλλαγή των συντεταγμένων στο W (για τα φ και ψ) και να δείξετε ότι είναι αμφιδιαφόριση.

ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ

$t=T$: το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα μίας καμπύλης

$n=N=p$:το πρώτο κάθετο διάνυσμα μίας καμπύλης

$b=B$: το δεύτερο κάθετο διάνυσμα μίας καμπύλης

$n'(s)=p(s)$:"πρώτη παράγωγος" ως προς s

$\{E,F,G\}\leftrightarrow\{g_{ij}\}$:Συνιστώσες της 1ης θεμελιώδους μορφής

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΘΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ