ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ & ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

17/6/2005

<u>Θέμα 1</u>. (α) Εστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ομαλή καμπύλη, όχι κατ' ανάγκη μοναδιαίας ταχύτητας. Να ορίσετε την καμπυλότητα της α και να την εκφράσετε συναρτήσει των α' και α''.

(β) Εστω $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα $k(s) = e^{2s}$, στρέψη $\tau(s) = e^{s}$ και τρίεδρο Frenet $\{T, N, B\}$. Θεωρούμε την καμπύλη $\gamma(s) = B(s)$. Να υπολογίσετε την συνάρτηση καμπυλότητας της γ.

<u>Θέμα 2</u>. (α) Εστω ομαλή καμπύλη $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ με μήκος $L = 8$. Να δείξετε ότι υπάρχει αναπαραμέτρηση γ της α, με $\gamma : [0, \lambda] \to \mathbb{R}^3$ και $\|\gamma'(s)\| = s$, $\forall s \in [0, \lambda]$. Να βρεθεί το λ.

(β) Δίνεται η καμπύλη $\alpha(t) = (1 - \cos t, t - \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ένα μέγιστο διάστημα στο οποίο η α είναι ομαλή. Επίσης, στο διάστημα αυτό να αναπαραμετρηθεί η α με το μήκος τόξου και να υπολογιστεί η καμπυλότητά της.

(γ) Να δείξετε ότι η συνήθης παραμέτρηση του γραφήματος μιας διαφορίσιμης απεικόνισης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ομαλή (κανονική) καμπύλη.

<u>Θέμα 3</u>. (α) Να ελέγξετε αν η απεικόνιση $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $x(u,v) = (uv, u, 2u)$ είναι κανονική παραμέτρηση επιφάνειας.

(β1) Εστω (U, x) παραμέτρηση μιας επιφάνειας S με $x(q) = p$, $q \in U$. Αν $F = 0$, να δείξετε ότι για τον τελεστή σχήματος $\Sigma_p : T_pS \to T_pS$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\Sigma_p(x_u) = \frac{e}{E} \cdot x_u + \frac{f}{G} \cdot x_v$$
$$\Sigma_p(x_v) = \frac{f}{E} \cdot x_u + \frac{g}{G} \cdot x_v$$

όπου οι προηγούμενες εκφράσεις θεωρούνται υπολογισμένες στο q, και E, F, G, e, f, g τα μεγέθη $1^{\eta\varsigma}$ και $2^{\eta\varsigma}$ θεμελιώδους μορφής της παραμέτρησης χ.

(β2) Υποθέτοντας επιπλέον ότι στο σημείο q είναι $E = G = 1$, $e = 2$, $f = 0$, $g = 3$, να βρείτε τις κύριες καμπυλότητες και να δείξετε ότι τα χ_u, χ_v είναι κύριες (χαρακτηριστικές) διευθύνσεις.

<u>Θέμα 4.</u> (α) Έστω S κανονική (ομαλή) επιφάνεια και α ομαλή καμπύλη επί της S, μοναδιαίας ταχύτητας με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = w$, $\|w\| = 1$. Να ορίσετε την κάθετη καμπυλότητα της α στο 0 και να δείξετε ότι ισούται με $\mathrm{II}_p(w)$.

(β) Δίνεται η καμπύλη, μοναδιαίας ταχύτητας, $\gamma(u) = (e^u, 0, g(u))$, $u \in [0,2]$, και θεωρούμε την επιφάνεια S που προκύπτει από την περιστροφή της γ περί τον άξονα των z. Να βρεθεί το εμβαδόν της S.

Διευκρίνιση: $B = \mathbf{b}$ = δεύτερο κάθετο διάνυσμα

$\alpha' = \dot{\alpha}$ = παράγωγος ως προς την δοσμένη μεταβλητή

Να απαντήσετε και στα 4 Θέματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!