Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

23 Ιουνίου 2008

1. Έστω η διαφορίσιμη καμπύλη

$$\alpha(t) = (\sin(2t+1), f(t), \cos(2t+1))$$

ι) Για ποιές συναρτήσεις $f(t)$ η ταχύτητα της α είναι σταθερή;

ιι) Υποθέστε ότι η ταχύτητα της α είναι σταθερή.

Βρείτε αναπαραμέτρηση της α μοναδιαίας ταχύτητας και υπολογίστε την καμπυλότητα και την στρέψη της α. Στην περίπτωση αυτή:

Για ποιές συναρτήσεις $f(t)$ είναι η α κύκλος; Επίσης, δείξτε ότι αν η α δεν είναι κύκλος τότε είναι κυκλική έλικα.

2. Έστω $\alpha(s)$ ομαλή επίπεδη καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας της οποίας η καμπυλότητα $k(s)$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο. Έστω

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)} N(s)$$

όπου $N(s)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της α στο $\alpha(s)$.

ι) Υποθέστε ότι $k'(s) \neq 0$. Δείξτε ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα της α στο $\alpha(s)$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της β στο $\beta(s)$.

ιι) Δείξτε ότι η εφαπτόμενη ευθεία της β στο $\beta(s)$ περνάει από το $\alpha(s)$.

3. Έστω S η επιφάνεια του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$.

ι) Βρείτε μία παραμέτρηση της S. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : S \to \mathbb{R}$ η οποία αντιστοιχεί σε κάθε σημείο της S την προβολή του στον άξονα των z. Δείξτε ότι η f είναι διαφορίσιμη.

ιι) Βρείτε μία βάση του εφαπτόμενου χώρου της S στο σημείο $p = (1, 1, 2)$, και την καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο ίδιο σημείο.

4. Έστω S η επιφάνεια που δίνεται από την παραμέτρηση

$$r(u, v) = ((3 + \sin v)\sin u, (3 + \sin v)\cos u, \cos v), \ \ -\pi < u, v < \pi$$

ι) Υπολογίστε το κάθετο διάνυσμα της S.

ιι) Υπολογίστε το εμβαδόν της S.

ιιι) Υπολογίστε τις κύριες καμπυλότητες της S.

Απαντήστε και στα 4 θέματα.