ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ 3/7/2009

Θέμα 1. α) Δίνεται καμπύλη $a(t)=(e^t, t, e^{2t})$, $t\in\mathbb{R}$. Να βρεθεί η καμπυλότητα της a και η καρτεσιανή εξίσωση του εγγύτατου επιπέδου στο $t=0$.

β) Έστω $\gamma(s)$ καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας και θετικής καμπυλότητας που ικανοποιεί τη σχέση $\gamma(s)=\lambda(s)T(s)+\mu(s)B(s)$. Αφού δείξετε ότι λ και μ είναι διαφ. συναρτήσεις, να βρείτε τη σχέση που συνδέει την καμπυλότητα με τη στρέψη της γ.

ΘΕΜΑ 2. α) Να δείξετε ότι μία ομαλή καμπύλη είναι επίπεδη τότε και μόνο τότε αν η στρέψη της είναι 0.

β) Να βρείτε όλες τις καμπύλες γ μοναδιαίας ταχύτητας του $\mathbb{R}^3$ που έχουν σταθερή στρέψη $\tau=2$ και είναι τέτοιες ώστε η καμπύλη $b(s)=:B(s)$ να είναι επίπεδη.
Τι είδους καμπύλες είναι οι γ?

ΘΕΜΑ 3 Δίνεται η σφαίρα S κέντρου O και ακτίνας 3 και το σημείο της $p=(-2,2,1)$. Θεωρούμε τις παραμετρήσεις

$$x(u,v) = (u, v, \sqrt{9-u^2-v^2}), \quad u^2+u^2<9, \quad u<0,$$

$$\psi(s,t) = (-\sqrt{9-s^2-t^2}, s, t), \quad s^2+t^2<9, \quad t>0.$$

και τα σημεία $q=x^{-1}(p)$, $r=\psi^{-1}(p)$

α) Να βρεθούν οι βάσεις $\{X_u(q), X_v(q)\}$ και $\{\psi_t(r), \psi_s(r)\}$ του T_pS και να εκφραστούν τα διανύσματα της δεύτερης ως γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων της πρώτης.

β) Να βρεθεί η απεικόνιση αλλαγής συντεταγμένων (: με ποιά απεικόνιση η ψ είναι αναπαραμέτρηση της X).

ΘΕΜΑ 4ο

Εστω S ομαλή επιφάνεια, X ομαλή παραμέτρηση της και το σημείο της $p = X(2,1)$. Επίσης δίνονται οι συνιστώσες (: θεμελιώδη μεγέθη) της I και II θεμελιώδους μορφής

$$E=1, \quad F=0, \quad G=5+u^2, \quad e=g=0, \quad f=-(5+u^2)^{-\frac{1}{2}}$$

α) Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $\gamma(t)=X(2,t)$, $t\in[0,2\pi]$

β) Αν T είναι το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,2)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τμήματος $X(T)$ της S.

γ) Αν $X_u(2,1)=(1,0,0)$, $X_v(2,1)=(0,-3,0)$ και N το αντίστοιχο της παραμέτρησης κάθετο διάνυσμα, να υπολογιστούν τα $N_u(2,1)$ και $N_v(2,1)$.

Διευκρίνιση: $\{T,N,B\}\equiv\{\vec{t},\vec{p},\vec{b}\}\equiv\{T,n,b\}$ το τρίεδρο Frenet.