Θέμα 1ο

α) Αν $\gamma: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα k και στρέψη τ και A πίνακας στροφής (3×3 ορθογώνιος πίνακας με $|A|=1$) τότε η καμπύλη $\beta(s)=A\gamma(s)$ έχει επίσης καμπυλότητα k και στρέψη τ.

β) Να δείξετε ότι η $\gamma(t)=(4\text{συν}t, 5\text{ημ}t)$, $t\in[0,2\pi)$ παριστάνει έλλειψη και να βρείτε τα σημεία όπου η καμπυλότητα είναι μέγιστη και ελάχιστη.

Θέμα 2ο

Δίνεται καμπύλη γ μοναδιαίας ταχύτητας με καμπυλότητα $\kappa(s)>0$ και στρέψη $\tau(s)\equiv -1$ γιά $\forall s\in(0,1)$. Θεωρούμε την καμπύλη $\beta(s)=\gamma(s)+b(s)$ ($b(s)$ το δικάθετο διάνυσμα της $\gamma(s)$).

i) Να δείξετε ότι η β είναι ομαλή (κανονική) και να βρείτε αναπαραμέτρηση μοναδιαίας ταχύτητας.

ii) Να βρεθεί η καμπυλότητα της β συναρτήσει της κ.

Αν είναι γνωστό ότι η β είναι επίπεδη και ότι γιά κάποιο $t_0\in(0,1)$, $\gamma(t_0)=0$, $T(t_0)=e_2$, $n(t_0)=e_3$ και $\kappa(t_0)=1$ να βρείτε:

iii) την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου της β.

iv) την συνάρτηση κ.

(Σημείωση (T,N,B) ή (T,n,b) ή $(\vec{t},\vec{p},\vec{b})$ συμβολίζει το τρίεδρο Frenet της γ).

Θέμα 3ο

α) Να εξετάσετε αν το διάνυσμα $(1,1,4)$ είναι εφαπτόμενο στην επιφάνεια $x^2+3y^2+z^2=5$ στο σημείο της $(1,1,-1)$.

β) Να δείξετε πλήρως ότι το σύμβολο Christoffel Γ_{11}^1 (ή Γ_{uu}^u) μιας παραμετρικής επιφάνειας $x: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ είναι συνάρτηση των συνιστωσών E, F, G της πρώτης θεμελειώδους μορφής και των παραγώγων τους.

γ) Να δείξετε ότι για μια παραμετρική επιφάνεια $X: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $F=f=0$ στο U το διάνυσμα X_u είναι κύριο (δηλ. για κάθε $q \in U$ το $X_u(q)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του αντίστοιχου τελεστή σχήματος).

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν παραμετρικές επιφάνειες $x: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, $y: U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με τις ίδιες συνιστώσες πρώτης θεμελειώδους μορφής στο U και συνιστώσες δεύτερης θεμελειώδους μορφής ως εξής: η x: $e_x=1$ $f_x=0$, $g_x=0$ και η y: $e_y=1$, $f_y=0$, $g_y=1$ στο U.

(Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας).

Θέμα 4ο

Δίνεται ομαλή παραμετρική επιφάνεια $X:(0,+\infty)^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $E = 1+u$, $F=\sqrt{uv}$, $G = 1+v$.
Επίσης είναι γνωστό ότι για το σημείο $q=(1,4)$ ισχύει $X_u(q) = (1,0,1)$, $X_v(q) = (0,1,2)$, $e(q) = 1/2\sqrt{6}$, $f(q)=0$, $g(q) = 1/4\sqrt{6}$.

Να υπολογισθούν τα εξής:

α) Το μήκος της καμπύλης $a(t) = X(t,4t)$, $0<t\leq 1$.

β) Η γωνία τομής της a με την καμπύλη $\beta(s) = X\left(\frac{s}{2}, 3s^2-8\right)$.

γ) Το εμβαδόν του $X(T)$, όπου T το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,2)$.

δ) Το διάνυσμα $N_u(q)$.

ε) Το διάνυσμα $X_{uu}(q)$.