

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

25.06.1998

ΘΕΜΑ 1. (α) Έστω X n -διάστατη διαφορική πολλαπλότητα και $x \in X$. Να ορισθεί η γραμμική δομή του $T(X, x)$ και να αποδειχθεί ότι είναι ανεξάρτητη του θεωρουμένου χάρτου. (β) Να ευρεθεί η καμπύλη που υλοποιεί το βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα του \mathbb{R} στο \mathbb{R}^n και να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα αυτό ως σημειακή παραγωγή είναι η σηνήθης παράγωγος. (γ) Αν $u = [(x, \alpha)] \in T(X, x)$, να δείξετε ότι $u = \alpha(0)$.

ΘΕΜΑ 2. (α) Έστω η απεικόνιση $\lambda_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lambda_s(t) = s + t$. Να δείξετε ότι η λ_s είναι ολοκληρωτική καμπύλη του βασικού δ.π. $\partial_t = d/dt$. (β) Αν $\xi \in \mathcal{X}(X)$ και α ολοκληρωτική καμπύλη του ξ , να δείξετε ότι και η $\alpha \circ \lambda_s$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του ξ . (γ) Έστω $\xi \in \mathcal{X}(X)$, (U, φ) χάρτης του X και $\tilde{\xi} \in \mathcal{X}(\varphi(U))$ με $\tilde{\xi}_i = \xi_i \circ \varphi^{-1}$. Να δείξετε ότι τα $\xi|_U \in \mathcal{X}(U)$ και $\tilde{\xi}$ είναι φ-συσχετισμένα.

ΘΕΜΑ 3. (α) Αν $f \in C^\infty(X, Y)$, να ορισθεί το σημειακό διαφορικό $(df)_x$, $x \in X$, της f και να αποδειχθεί ότι είναι γραμμική απεικόνιση. (β) Αν $x \in X$, $u \in T(X, x)$, $f \in C^\infty(X, Y)$ και $g \in C^\infty(Y)$, να δείξετε ότι $(df)_x(u)(g) = u(g \circ f)$. (γ) Αν $X = \mathbb{R}^3$, $p = (1, 0, 0)$ και $u = (1, 2, 3) \in T(\mathbb{R}^3, p)$, να υπολογισθεί η σημειακή παραγωγή που ορίζει το u στην $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ με $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

ΘΕΜΑ 4. Να δείξετε ότι η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\varphi(t, (x, y)) = ((2 + \sin y)t + x, y)$, $t \in \mathbb{R}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, είναι διαφορική ροή του \mathbb{R}^2 και να υπολογίσετε το απειροστικό της γεννήτορα.

ΘΕΜΑ 5. Έστω G ομάδα Lie. (α) Να αποδείξετε πλήρως ότι $T(G, e) = \mathcal{L}(G)$, ως προς ένα γραμμικό ισομορφισμό. (β) Να ορίσετε την εκθετική συνάρτηση της G .

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΘΟΥΝ ΤΑ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΘΕΜΑΤΑ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ