ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2003

Θέμα 1^{o}: Οι επόμενες προτάσεις είναι σωστές ή λάθος; Δικαιολογήστε.

Α) Δεν υπάρχει παραμετρική επιφάνεια με συνιστώσες της πρώτης θεμελιώδους μορφής $E=\text{συν}^2 u$, $F=0, G=1$ με $u,v\in\Re$

Β) Δύο ομαλές (κανονικές) επίπεδες καμπύλες μοναδιαίας ταχύτητας, β, γ με την ίδια καμπυλότητα και $\beta(0)=\gamma(0)$, έχουν $\beta(t)=\alpha(t)\ \forall t\in\Re$

Γ) Η απεικόνιση $X:\Re^2\to\Re^3:\ (u,v)\mapsto(u,2u,uv^2)$ είναι κανονική παραμέτρηση επιφάνειας.

Δ) Η απεικόνιση $\alpha(t)=(t^3,t^3)\ t\in\Re$, ορίζει ομαλή (κανονική) επίπεδη καμπύλη με ίχνος ευθεία γραμμή.

Θέμα 2^{o}: Δίνεται η απεικόνιση $\alpha:\Re\to\Re^2: t\mapsto\alpha(t)=(e^t\cos t,e^t\sin t)$.

α) Να αποδείξετε ότι η α παριστά μια ομαλή (κανονική) επίπεδη καμπύλη, την οποία να αναπαραστήσετε με το μήκος τόξου.

β) Να βρείτε την καμπυλότητα της α, σαν συνάρτηση του μήκους τόξου $k=k(s)$.

γ) Για $t=0$ να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του εγγύτατου κύκλου στο σημείο $\alpha(0)$ της καμπύλης.

Θέμα 3^{o}: Δίνεται η παραμετρική επιφάνεια $X(u,v)=(u,v,uv)$, $u,v\in\Re$.

α) Να υπολογίσετε τις συνιστώσες της πρώτης και δεύτερης θεμελιώδους μορφής.

β) Να βρείτε την καμπυλότητα Gauss της επιφάνειας.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $X(0,0)$.

Θέμα 4^{o}: Να απαντήσετε σε δύο από τα παρακάτω ερωτήματα.

Α) Αν οι πρώτες κάθετες μιας ομαλής καμπύλης στο χώρο διέρχονται από σταθερό σημείο, η καμπύλη είναι επίπεδη.

Β) Έστω $X:\Re^2\to\Re^3$ κανονική παραμέτρηση επιφάνειας, για την οποία ισχύει $S_p=0$, $\forall p\in X(\Re^2)$.[$S_p=$ τελεστής μορφής ή σχήματος]. Να αποδείξετε ότι το $X(\Re^2)$ περιέχεται σε ένα επίπεδο.

Γ) Έστω $X:\Re^2\to\Re^3$ κανονική παραμέτρηση επιφάνειας και $f:\Re^2\to\Re^2$ αμφιδιαφόριση. Να αποδείξετε ότι η $\psi=X\circ f$ είναι κανονική παραμέτρηση επιφάνειας. [δηλ. ένα κανονικό σημείο μιας επιφάνειας παραμένει κανονικό κάτω από αποδεκτές αναπαραμετρήσεις].

Δ) Δίνεται η σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$ του $\Re^3$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τμήματος της σφαίρας που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων $z=0$ και $z=1/2$

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΚΑΙ ΣΤΑ 4 ΘΕΜΑΤΑ.