

Θέμα 1°:

(A) Έστω $\gamma = \gamma(s)$ ομαλή καμπύλη, μοναδιαίας ταχύτητας, με στρέψη $r(s) \neq 0$. Να δείξετε ότι για την καμπυλότητα της γ ισχύει η σχέση $k(s) = \frac{1}{r(s)^2} \|(r'(s)B'(s) - r(s)B''(s)) \times B(s)\|$ όπου $B(s)$ είναι το δεύτερο κάθετο διάνυσμα. (B) Δίνεται η καμπύλη $a(t) = (t, t^2, t^3), t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η καμπυλότητα $k(t)$. Επίσης, να βρεθεί η (καρτεσιανή) εξίσωση του ευθειοποιούντος επιπέδου της a για $t = 1$.

Θέμα 2°:

(A) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ομαλές καμπύλες γ που να έχουν την ιδιότητα : όλες οι διχοτόμοι πρώτης και δεύτερης καθέτου (δηλ. οι ευθείες που διέρχονται από το $\gamma(s)$ είναι παράλληλες προς το διάνυσμα $B(s) + N(s)$), να διέρχονται από σταθερό σημείο. Αν ναι, ποιες είναι οι καμπύλες αυτές; (B) Δίνεται η καμπύλη $\gamma(t) = (t^2, \frac{1}{6}(4t+1)^{3/2}), t \in [0,1]$. Να βρεθεί αναπαράμετρηση μοναδιαίας ταχύτητας της γ με αρχικό σημείο $t = 0$.

Θέμα 3°:

Δίνεται ομαλή παραμετρική επιφάνεια $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ της οποίας τα πρώτα θεμελιώδη μεγέθη δίνονται από τις σχέσεις : $E = 1+u^2, F = -uv, G = 1+v^2$ όπου $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. (A) Να δείξετε ότι το μήκος τόξου της καμπύλης $a(t) = x(t, 2t)$ με αρχικό σημείο $t = 0$ είναι $s(t) = \int_0^t \sqrt{5+9\omega^2} d\omega$. (B) Να βρεθεί το εμβαδόν του τμήματος $X(D)$, όπου D ο κυκλικός δίσκος του \mathbb{R}^2 με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα 2. (Γ) Να βρεθεί η γωνία που η καμπύλη $a(t)$ τέμνει την καμπύλη $\beta(s) = X(1,s)$

Θέμα 4°:

Δίνεται η ομαλή παραμετρική επιφάνεια $X(u,v) = (u \cos v, u \sin v, v), (u,v) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$. (A) Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο που αντιστοιχεί στο $(u,v) = (1, \pi/2)$. (B) Να βρεθούν τα πρώτα θεμελιώδη μεγέθη E, F, G της επιφάνειας. (Γ) Να βρεθεί το μοναδιαίο κάθετο πεδίο $N(p), p = X(u,v)$. (Δ) Να βρεθεί η καμπυλότητα Gauss στο σημείο της επιφάνειας που αντιστοιχεί στις παραμέτρους

ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ

$t = T$: το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα μίας καμπύλης

$n = N = p$: το πρώτο κάθετο διάνυσμα μίας καμπύλης

$b = B$: το δεύτερο κάθετο διάνυσμα μίας καμπύλης

$n'(s) = p(s)$: "πρώτη παράγωγος" ως προς s

$\{E, F, G\} \leftrightarrow \{g_{ij}\}$: Συνιστώσες της 1ης θεμελιώδους μορφής

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΘΟΥΝ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ