210204
ΜΠΑΡΣΟΥΛΑ ΔΗΜΗΤΡΑ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ & ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

26/09/05

ΘΕΜΑ 1 (α) Δίνεται διαφορίσιμη απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και η καμπύλη $t\mapsto\alpha(t)=(t,f(t))\in\mathbb{R}^2$. Να υπολογιστεί η συνάρτηση καμπυλότητας $k(t)$ της α.

(β) Εστω ομαλή καμπύλη $\alpha: I\to\mathbb{R}^3$ με $k>0$, για την οποία ισχύει ότι $\alpha'(t)$, $\alpha''(t)$, $\alpha'''(t)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, $\forall t\in I$. Να δικαιολογήσετε ότι η καμπύλη είναι επίπεδη.

(γ) Δίνεται καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με $k(s)=e^s$ και $\tau(s)=1$, $\forall s\in\mathbb{R}$. Αν $T(0)=e_1$, $N(0)=e_2$, $B(0)=e_3$, να υπολογιστεί το $B'''(0)$.

ΘΕΜΑ 2 (α) Δίνεται η καμπύλη $\gamma(t)=(\cos t, \sin t, e^t)$, $t\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι είναι ομαλή, να υπολογίσετε την συνάρτηση καμπυλότητας της γ και να βρείτε την εξίσωση του εγγυτάτου επιπέδου για $t=0$.

(β) Δίνεται κανονική καμπύλη $\gamma(s)$, $s\in I$, μοναδιαίας ταχύτητας, μη μηδενικής καμπυλότητας k και με στρέψη τ, της οποίας τα εφαπτόμενα διανύσματα σε κάθε σημείο της σχηματίζουν σταθερή γωνία με τον θετικό άξονα των z. Να δείξετε πλήρως ότι η συνάρτηση $s\mapsto \tau(s)/k(s)$ είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 3 Εστω $U=(0,2\pi)\times\mathbb{R}$ και η απεικόνιση

$$\chi:(u,v)\mapsto(\cos u - v\sin u,\ \sin u+v\cos u,\ v),\quad (u,v)\in U.$$

(α) Να δείξετε ότι η χ ορίζει κανονική επιφάνεια.

(β) Να υπολογίσετε τα μεγέθη E, F, G.

(γ) Να υπολογιστούν τα μεγέθη e, f, g στο σημείο $A=\chi(\pi/2, 0)$ και να βρεθεί η καμπυλότητα Gauss στο A.

ΘΕΜΑ 4 (α) Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου της ομαλής επιφάνειας $\chi = (u, v, f(u,v))$, στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

(β) Έστω ομαλή επιφάνεια S και $p \in S$. Αν $w_1, w_2 \in T_p S$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\Sigma_p(w_1) = 3w_1 - 2w_2 ,$$

$$\Sigma_p(w_2) = w_1 ,$$

όπου $\Sigma_p := -T_p N := -d_p N$ ο τελεστής σχήματος της S στο p, να υπολογιστούν οι κύριες καμπυλότητες της S στο p.

Διευκρίνιση: $T = \mathbf{t} = \vec{t}$, $N = \mathbf{n} = \vec{p}$, $B = \mathbf{b} = \vec{b}$

Να απαντηθούν και τα 4 Θέματα.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !