ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

30/8/2006

ΘΕΜΑ 1. (α) Να δείξετε ότι μια ομαλή καμπύλη του χώρου με μηδενική στρέψη και σταθερή καμπυλότητα $k>0$ είναι τμήμα ενός κύκλου.

(β) Εστω $\gamma: I \to \mathbb{R}^3$ ομαλή καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας με αντίστοιχο τρίεδρο Frenet T, n, b, τέτοιο ώστε για $s \in I$ το διάνυσμα

$$\sin(2s)\cdot T(s) + \cos(2s)\cdot n(s) + b(s)$$

να είναι σταθερό. Να δείξετε ότι η γ είναι τμήμα κύκλου την ακτίνα του οποίου να προσδιορίσετε.

ΘΕΜΑ 2. (α) Δίνεται καμπύλη $\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, μοναδιαίας ταχύτητας, με καμπυλότητα $k(s) = e^s$. Εστω η καμπύλη $\beta(s) = 2T(s)$, όπου $T(s)$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της γ. Να βρεθεί αναπαραμέτρηση της β, μοναδιαίας ταχύτητας, με αρχικό σημείο $s_0 = 0$.

(β) Δίνεται καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας $\beta: I = [0, 10\pi] \to \mathbb{R}^3$ της οποίας το δεύτερο κάθετο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση

$$b(s) = \left(\frac{4}{5}\sin\left(\frac{s}{5}\right), -\frac{4}{5}\cos\left(\frac{s}{5}\right), \frac{3}{5}\right), \quad s \in I,$$

και η στρέψη είναι

$$\tau(s) = \frac{4}{25}, \quad \forall s \in I.$$

Να υπολογιστεί η καμπυλότητα $k(s)$ της β. Τι είδους καμπύλη είναι η β;

ΘΕΜΑ 3. Δίνεται η επιφάνεια εκ περιστροφής

$$x(u,v) = (g(u), h(u)\cos v, h(u)\sin v),$$

όπου $h(u) > 0$ και $(h')^2 + (g')^2 = 1$.

(α) Να υπολογιστούν τα μεγέθη E, F, G της $1^{ης}$ θεμελιώδους μορφής.

(β) Να υπολογιστεί το μήκος της καμπύλης $\alpha(t) = x(2t, 3t)$, $t \in [0, \pi/3]$, ως συνάρτηση του h.

ΘΕΜΑ 4. Δίνεται η παραμέτρηση επιφανείας $\chi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $\chi(u,v) = (u, v, uv)$, και τα σημεία $q = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ και $p = \chi(q)$.
Να βρεθεί

(α) Η βάση του εφαπτόμενου χώρου (επιπέδου) στο p που αντιστοιχεί στην παραπάνω παραμέτρηση.

(β) Ο πίνακας του τελεστή σχήματος ως προς την προηγούμενη βάση.

(γ) Η μέση καμπυλότητα της επιφάνειας στο p.

ΔΙΕΥΚΡΙΝΙΣΕΙΣ:

$T = \vec{t}$ = το εφαπτόμενο διάνυσμα
$N = n = \vec{n}$ = το πρώτο κάθετο διάνυσμα
$B = b = \vec{b}$ = το δεύτερο κάθετο διάνυσμα