

Διαφορική Γεωμετρία Καμπυλών και Επιφανειών

Εξετάσεις 17/9/2009

Θέμα 1. Δίνεται καμπύλη α μοναδιαίας ταχύτητας, της οποίας το δεύτερο κάθετο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση

$$B(s) = \left(\frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}, \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \sin \frac{s}{5} \right)$$

και η στρέψη της είναι $\tau(s) = -\frac{3}{25}$.

- α) Να βρεθούν τα υπόλοιπα διανύσματα του τριέδρου Frenet.
β) Να βρεθεί η καμπύλη α .

Θέμα 2. α) Να αποδειχθεί πλήρως ο τύπος Frenet για το N' .

β) Δίνεται καμπύλη μοναδιαίας ταχύτητας α με καμπυλότητα $\kappa(s) = e^s$ και στρέψη $\tau(s) = e^{2s}$. Να υπολογιστεί η καμπυλότητα $\kappa_\gamma(s)$ της καμπύλης $\gamma(s) = N(s)$.

Θέμα 3. α) Να περιγράψετε πώς ορίζεται ο τελεστής σχήματος $\Sigma_p = -d_p N$ μιας κανονικής επιφάνειας S και να δείξετε ότι απεικονίζει τον εφαπτόμενο χώρο $T_p S$ στον εαυτόν του.

β) Να αποδειχθεί η σχέση

$$\langle \Sigma_p(u), v \rangle = \langle u, \Sigma_p(v) \rangle, \quad u, v \in T_p S.$$

Θέμα 4. Δίνεται η επιφάνεια

$$\chi(u, v) = (u \sin v, u \cos v, v), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

α) Να εξετάσετε αν είναι κανονική (ομαλή) παραμέτρηση.

β) Να βρεθεί το εμβαδόν του τμήματος $\chi(D)$, όπου D το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 2)$.

γ) Να υπολογιστούν τα θεμελιώδη μεγέθη 1ης και 2ης τάξης (συνιστώσες 1ης και 2ης θεμελιώδους μορφής) και οι κύριες καμπυλότητες.

Διευκρίνιση: $\{T, N, B\} \equiv \{\vec{t}, \vec{p}, \vec{b}\} \equiv \{T, n, b\}$ το τριέδρο Frenet.