ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Ι

4/9/1998

Θέμα 1. (α) Να προσδιοριστεί ο μέγιστος διαφορικός άτλαντας που ορίζει την κανονική διαφορική δομή του R^n.

(β) Να αποδειχθεί ότι η απεικόνιση ενός χάρτη είναι πάντα αμφιδιαφόριση ως προς τις αντίστοιχες σχετικές διαφορικές δομές.

Θέμα 2. (α) Εστω G ομάδα Lie, e το ουδέτερο στοιχείο της, l_x οι αριστερές μεταφορές κατά x, $x \in G$ και $v \in T(G,e)$. Δείξτε ότι η απεικόνιση

$$\xi : G \to T(G) : x \mapsto (dl_x)_e(v)$$

ορίζει ένα (διαφορίσιμο) αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο της G.

(β) Να υπολογιστούν οι ολοκληρωτικές καμπύλες του βασικού διανυσματικού πεδίου ∂_1 του R.

Θέμα 3. (α) Εστω $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ πολλαπλότητες και $f : X \to Y$ διαφορίσιμη. Δείξτε ότι τα πεδία $\xi \in \mathcal{X}(X)$, $\eta \in \mathcal{X}(Y)$ είναι f-συσχετισμένα, εάν και μόνον εάν η f διατηρεί τις ολοκληρωτικές τους καμπύλες.

(β) Εστω $f : R^3 \to R : (x,y,z) \mapsto x^2 + 3yz$ και

$$\alpha : R \to R^3 : t \mapsto (t^3, 2t, t-1).$$

Αν v είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα που ορίζει η α, να υπολογιστεί το $v(f)$.

Θέμα 4. (α) Να βρεθεί η καμπύλη που υλοποιεί το βασικό εφαπτόμενο διάνυσμα του R, στο t_0 και να αποδειχθεί ότι η σημειακή παραγώγιση που αντιστοιχεί στο ανωτέρω διάνυσμα είναι η συνήθης παράγωγος.

(β) Αν G ομάδα Lie και $x \in G$, να βρείτε την σχέση που συνδέει τους $T(G,x)$ και $T(G,e)$.

Θέμα 5. (α) Να δείξετε ότι η απεικόνιση

$$\phi : R \times R^2 \to R^2 : (t,(x,y)) \mapsto ((2 + \eta\mu y)t + x, y)$$

είναι διαφορική ροή του R^2 και

(β) να υπολογιστεί ο απειροστικός της γεννήτορας.

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ 4 ΑΠΟ ΤΑ 5 ΘΕΜΑΤΑ