ΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ: ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΔΥΝΑΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

31-1-2000 1

Θ.1) α) Να βρεθεί η δεύτερης τάξης γραμμική ομογενής εξίσωση διαφορών που παράγει την ακολουθία 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, ... Στη συνέχεια να λυθεί η εξίσωση που τα προκύπτει.

β) Να βρεθεί η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών:
$(E-3I)^2 \cdot (E^2+4I)y_k = 0$. ($E$ είναι ο τελεστής μετατόπισης, δηλ. $Ey_k = y_{k+1}$ και I είναι ο ταυτοτικός τελεστής).

Θ.2) α) Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών $y_{k+1} = y_k^2 + 3y_k$.
i) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας και να χαρακτηρισθούν ως προς το είδος της ευστάθειας.
ii) Να επιβεβαιωθούν τα συμπεράσματα του ερωτήματος i) από το ιστοδιάγραμμα της εξίσωσης με αρχικές συνθήκες $y_0 = 0,5$ και $y_0' = -2,8$.

β) Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών: $y_{k+2} + P_1 y_{k+1} + P_2 y_k = g_k$, όπου $P_1, P_2 \in \mathbb{R}$ με $P_1^2 - 4P_2 < 0$ και $0 < P_2 < 1$. Αν $y_k^{(1)}$ και $y_k^{(2)}$ είναι δύο λύσεις της εξίσωσης και $x_k := y_k^{(1)} - y_k^{(2)}$, να δειχθεί ότι: $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$.

Θ.3) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$\bar{y}_{k+1} = A\bar{y}_k, \quad \bar{y}_k \in \mathbb{R}^3, \ k=0,1,2,\ldots \quad \text{με } \bar{y}_0 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \text{ και } A = \begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & 1 & 6\end{bmatrix}.$$

Θ.4) α) Θεωρούμε την εξίσωση διαφορών: $y_{k+1} = ay_k - y_k^2$, $a > 0$

Να βρεθούν και να χαρακτηρισθούν ως προς το είδος της ευστάθειας τα σημεία ισορροπίας της εξίσωσης (για τις διάφορες τιμές του a). Επίσης να βρεθούν και να χαρακτηρισθούν ως προς την ευστάθεια τα περιοδικά σημεία με θεμελιώδη περίοδο 2.

β) Να λυθεί με χρήση του Z-μετασχηματισμού η εξίσωση διαφορών:

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} + 3y_k = 2^k, \quad \text{με } y_0 = 0,\ y_1 = 1.$$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u>: <u>ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ</u>.