ΦΥΣΙΚΟ ΤΜΗΜΑ: ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΙΙ , [illegible]

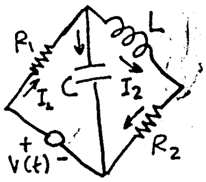
Θ 1: Να λυθεί με τη μέθοδο των δυναμοσειρών η διαφορ. εξίσωση:
$$(1+t^2)x'' + 2tx' - 2x = 0 \quad , \text{περί το } t_0 = 0 .$$

Θ.2: α) Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ και $y_1(t), y_2(t)$ δύο λύσεις της διαφ. εξίσωσης $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t)$. Να δείξετε ότι: $\lim_{t \to +\infty} \{y_1(t) - y_2(t)\} = 0$.

β) Να λυθεί η διαφ. εξίσωση: $y''(t) + 4y(t) = te^t + t\eta\mu 2t$.

Θ.3: α) Αν $\Phi(t)$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της διαφ. εξίσωσης $\bar{y}'(t) = A(t)\bar{y}(t)$, $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $1 \le i, j \le n$, $a_{ij}(t)$ συνεχής επί του $I \subseteq \mathbb{R}$ και C ένας $n \times n$ σταθερός πίνακας με $|C| \neq 0$, τότε:
i) ο $\Phi(t) \cdot C$ είναι επίσης θεμελιώδης πίνακας. ii) Αν $\Phi_1(t)$ είναι ένας άλλος θεμελιώδης πίνακας λύσεων, τότε υπάρχει πίνακας $C_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ή $\mathbb{C}^{n \times n}$), με $|C_1| \neq 0$ και τέτοιος ώστε: $\Phi_1(t) = \Phi(t) \cdot C_1$.

β) Να βρεθούν τα I_1, I_2 και το φορτίο Q του πυκνωτή για το κύκλωμα του σχήματος. Δίνονται: $C = \frac{1}{4}$ F, $L = 1$ H, $R_1 = 4$ Ohm, $R_2 = 1$ Ohm, $V(t) = 8e^{-t}$ volts



Θ.4: α) Να λυθεί η διαφ. εξίσωση: $txx' + t^2 + t + x^2 = 0$, $(t, x) \neq (0, 0)$.

β) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f(t)$, που είναι τέτοιες ώστε η διαφ. εξίσωση $f(t)x' + t^2 + x = 0$, $x = x(t)$ να δέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu(t) = t$ και στη συνέχεια να λύσετε την διαφ. εξίσωση.

Θ.5: α) Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και f συνεχής ως προς (t, x) και Lipschitz ως προς x στο U. Να αναπτύξετε γραφική μέθοδο εύρεσης προσεγγιστικής λύσης του προβλ. αρχικών τιμών.
$$x' = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0 .$$

β) Με τις παραπάνω προϋποθέσεις για την f να βρεθεί το πεδίο διευθύνσεων που ορίζεται μέσω της διαφ. εξίσωσης $x' = f(t, x)$ κατά μήκος της καμπύλης $x = g(t)$, όπου $g(t)$ είναι λύση της διαφ. εξίσωσης.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση των ορθογωνίων τροχιών της οικογένειας των καμπυλών: $t^2 + y^2 = \alpha t$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Να απαντήσετε σε τέσσερα (4) θέματα.