

Θ.1) Θεωρούμε ένα από εκρεμές μήκους l και βάρους mg που κινείται κατακόρυφα.

α) Να βρεθεί η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση του εκρεμούς θεωρώντας αμελητέα την αντίσταση του αέρα.

β) Αν η γωνία $\theta = \theta(t)$ είναι παραβλητή (σε rad) να λύσει η διαφορική εξίσωση του ερωτήματος α) ως προς $\theta(t)$, θεωρώντας τις αρχικές συνθήκες μηδενικές.

Θ.2) Δίνεται το Π.Α.Τ. $\bar{y}'(t) = A\bar{y}(t) + \bar{b}(t)$, $\bar{b}(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ p \end{bmatrix}$, $\bar{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$
 Ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1=1, \lambda_2=2$ με αντιστοίχως ιδιοδιανύσματα

$\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\bar{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Να βρεθούν:

α) Ο πίνακας e^{At} , β) Η λύση $\bar{y}(t)$ του Π.Α.Τ.

Θ.3) Ξύσμα μήκους m πέφτει κατακόρυφα από τη θέση ηρεμίας, υπό την επίδραση του βάρους του $B=mg$. Αν δέχεται την αντίσταση R του αέρα ανάλογη του μέτρου v της ταχύτητας ($R=kv$), να βρεθεί η εξάρτηση $v=v(t)$ (αν $v(0)=0$) καθώς και το $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t)$.
 Να γίνει σχολιασμός του αποτελέσματος από ηθικής πλευράς.

β) Έστω $y_1(t), y_2(t)$ λύσεις της δ.ε. $y''(t) + f(t)y'(t) + g(t)y(t) = 0$

, $t \in I \subseteq \mathbb{R}$, $f, g \in C(I)$. Να αποδειχθεί (παράγω) ότι η ορίζουσα Wronski $W(y_1, y_2)(t)$ είτε μηδενίζεται ταυτοτικά επί των I είτε $W(y_1, y_2)(t) \neq 0 \forall t \in I$.

Θ.4) α) Να βρεθεί ικανή και αναγκαία συνθήκη για τα α_1, α_2 ώστε η λύση των πρώτων αρχικών τιμών:

$$x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 4e^{-t}, \quad x(0) = \alpha_1, \quad x'(0) = \alpha_2$$

να είναι φραγμένη στο $[0, +\infty)$.

β) Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε. $(t-1)x'' - tx' + x = (t-1)^2, t > 1$

αν δύο λύσεις της είναι: $x_1(t) = -t^2 - 1, x_2(t) = e^t - t^2 - 1, t > 1$.

Θ.5) α) Να λυθεί το Π.Α.Τ. $(y^2 - 3t^2)y^{-4}y' = -2ty^{-3}, y(1) = 1$

β) Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των καμπύλων $y^2 - at = 0, a = \text{σταθ.}$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΤΕΣΣΕΡΑ (4) ΘΕΜΑΤΑ. —