

θ.1: Να προσδιορισθούν όλα τα διανύσματα $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^3$, για τα οποία η λύση των π.α.τ. $\bar{y}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \bar{y}(t)$, $\bar{y}(0) = \bar{y}_0$ είναι περιοδική συνάρτηση.

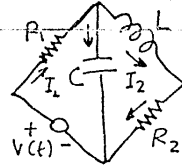
θ.2: α) Έστω το π.α.τ. $x' = \alpha_1 x - \alpha_2 x^2$, $x(0) = \beta$, με $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta \geq 0$.
 Να αποδειχθεί ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \begin{cases} \alpha_1/\alpha_2, & \beta > 0 \\ 0, & \beta = 0 \end{cases}$.

β) Αν φ_1, φ_2 είναι λύσεις της δ.ε. $\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = f(t)$, όπου α, β, γ θετικοί σταθεροί και $f \in C(\mathbb{R})$, να αποδειχθεί ότι: $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) = 0$. Το ίδιο αυτάρχο συμπέρασμα αν $\beta = 0$;

θ.3: α) Αν $\Phi(t)$ είναι ένας θεμελιώδης πίνακας λύσεων της διαφ. εξίσωσης $\bar{y}'(t) = A(t)\bar{y}(t)$, $A(t) = [a_{ij}(t)]$, $1 \leq i, j \leq n$, $a_{ij}(t)$ συνεχής επί του $I \subseteq \mathbb{R}$ και C ένας πηχι σταθερός πίνακας με $|C| \neq 0$, τότε:

i) ο $\Phi(t) \cdot C$ είναι επίσης θεμελιώδης πίνακας. ii) Αν $\Phi_1(t)$ είναι ένας άλλος θεμελιώδης πίνακας λύσεων, τότε υπάρχει πίνακας $C_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (ή $\mathbb{C}^{n \times n}$), με $|C_1| \neq 0$ και τέτοιος ώστε: $\Phi_1(t) = \Phi(t) \cdot C_1$.

β) Να βρεθούν τα I_1, I_2 και το φορτίο Q ως συνάρτηση για το κύκλωμα του σχήματος. Δίνονται: $C = \frac{1}{4} F$, $L = 1 H$
 $R_1 = 4 \text{ Ohm}$, $R_2 = 1 \text{ Ohm}$, $V(t) = 8e^{-t} \text{ volts}$



θ.4: α) Να λυθεί η διαφ. εξίσωση: $y''(t) + 4y(t) = te^t + t \sin 2t$.

β) Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f(t)$, που είναι τέτοιες ώστε η διαφ. εξίσωση $f(t)x + t^2 + x = 0$, $x = x(t)$ να δέχεται ολοκληρωτικό παράγωγο $\mu(t) = t$ και στη συνέχεια να λύσετε την διαφ. εξίσωση.

θ.5: Μια λύση της δ.ε. $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ είναι η $y_1(t) = (1+t)^2$, $t > -1$, ενώ η ορίζουσα Wronski κάθε δύο λύσεων της δ.ε. είναι σταθερή. Να βρεθεί η γενική λύση της δ.ε. $y'' + p(t)y' + q(t)y = 1+t$, $t > -1$.

Σημείωση: Να απαντήσετε σε 2/6 σέρρα (4) θέματα.