ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι 24-1-2000

Θέμα 1: Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Να βρεθεί γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ έτσι ώστε $(f : \bar{e}) = A$, όπου $\bar{e}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$.

(ii) Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα: $u_1 = (1,1,0)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (0,1,1)$ αποτελούν μία βάση $\bar{u}$ του $\mathbb{R}^3$.

(iii) Να βρεθεί ο πίνακας $(f : \bar{u})$

Θέμα 2:

(i) Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \\ x + 3y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Να λυθεί και να βρεθεί μία βάση του χώρου V των λύσεών του.

(ii) Δείξτε ότι το σύνολο $W = \{(x+y, x-2y, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ είναι διανυσματικός υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

(iii) Να εξετασθεί αν $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$.

Θέμα 3: Έστω η γραμμική απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $(x_1, x_2, x_3)f = (2x_1 + x_2, x_2 - x_3, 2x_2 + 4x_3)$. Να βρεθεί:

(i) Ο πίνακας της f

(ii) Το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα της f

(iii) Ιδιοτιμές, ιδιοδιανύσματα και ιδιόχωροι του πίνακα της f.

Θέμα 4:

(i) Αν $V = \mathbb{R}^2$ και $a, b \in V$ με $a = (x_1, x_2)$ και $b = (y_1, y_2)$, τότε δείξτε ότι ο τύπος $(a,b) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ ορίζει εσωτερικό γινόμενο επί του V.

(ii) Αν $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ να δειχθεί ότι $A^2 + I \neq 0$.

(iii) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $|A| \neq 0$ να δείξετε πως βρίσκεται το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A^{-1} αν ξέρουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A.

Καλή Επιτυχία