**ΜΑΘΗΜΑ: ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ**
**20.10.1997**

**ΘΕΜΑ 1.** Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathcal{R}$ ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος;

$\alpha \in (-\frac{1}{2}, 1)$

**ΘΕΜΑ 2.** Εστω $A$ ένας $n \times n$ ταυτοδύναμος πίνακας ($A^2 = A$). Να αποδείξετε ότι:

(i) Ο πίνακας $A$ έχει ιδιοτιμές 0 ή 1.

(ii) $rank(A) = trace(A)$.

(iii) Εάν $A$ $n \times n$ συμμετρικός πίνακας μη ιδιάζων με ιδιοτιμές 0 ή 1 να δειχθεί ότι ο $A$ είναι ταυτοδύναμος πίνακας.

**ΘΕΜΑ 3.** α) Δίνεται πίνακας $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$. Να αποδείξετε ότι ο συζυγής του $A$ adj(A) ισούται με adj(A)$=EC_{n-1}(A)^T E$ όπου $E = diag\{1, -1, 1, -1, \ldots, \pm 1\}$ και $C_{n-1}$ ο $n-1$-τάξης σύνθετος πίνακας του $A$. Στη συνέχεια με τη βοήθεια αυτής της σχέσης να γράψετε τη συνάρτηση AJ=adjoint(A) της MATLAB η οποία δέχεται στην είσοδο τον πίνακα $A$ και υπολογίζει στην έξοδο τον πίνακα AJ=adj(A).

β) Εστω $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\lambda_i \in \mathcal{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j$. Να δειχθεί ότι ο υπόχωρος $\mathcal{V}$ του $\mathcal{C}^n$ όπου $\mathcal{V} = < \bar{e}_{i_1}, \bar{e}_{i_2}, \ldots, \bar{e}_{i_k} >$, $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$ είναι $A$-αναλλοίωτος. ($\bar{e}_i = [0 \ldots \underset{\uparrow}{1} \ldots 0]^t$).

i θέση

**ΘΕΜΑ 4.** α) Αν $A \in \mathcal{C}^{n \times n}$, να δειχθεί ότι $|||A|||_2 = max\{\sqrt{\lambda} : \lambda \in \sigma(A^* A)\}$, όπου $|||A|||_2$ είναι η νόρμα πινάκων που επάγεται από την Ευκλείδια διανυσματική νόρμα, $A^* = (\bar{A})^t$ και $\sigma(A^* A)$ το φάσμα του πίνακα $A^* A$.

β) Αν $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ να υπολογισθεί η $|||M|||_2$.

**ΘΕΜΑ 5.** Εστω ο πίνακας $A = [a_{ij}]$, $1 \le i, j \le 3$, $a_{ij} \in \mathcal{R}$ και $\sum_{i=1}^{3} |a_{i1}| = \frac{3}{4}$, $\sum_{i=1}^{3} |a_{i2}| = \frac{1}{4}$, $\sum_{i=1}^{3} |a_{i3}| = \frac{4}{5}$. α) Να βρεθεί η $|||A|||_1$ (νόρμα επαγόμενη από την $l_1$- διανυσματική νόρμα). β) Εάν $B = [b_{ij}]$, όπου $b_{ij} = a_{ij}$, εάν $i \neq j$ και $b_{ij} = 1 + a_{ij}$, αν $i = j$, $1 \le i, j \le 3$, να δείξετε ότι υπάρχει ο $B^{-1}$ και ισχύει : $\frac{5}{9} \le |||B^{-1}|||_1 \le 5$.

Απαντήστε σε τέσσερα (4) θέματα. **Κ Α Λ Η   Ε Π Ι Τ Υ Χ Ι Α**