ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ (31-5-2000)

Θ 1): α) Δίνεται ο $n\times n$ πίνακας $C_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$. Να δειχθεί ότι οι ιδιοτιμές του C_n είναι $1,\omega,\omega^2,\dots,\omega^{n-1}$, όπου $\omega = συν\frac{2\pi}{n} + iημ\frac{2\pi}{n}$.

β) Έστω ο κυκλικός πίνακας $W_3 = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_0 \end{bmatrix}$, $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{R}$ και

$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. I) Δείξτε ότι $W_3 = p(C_3)$ II) Να βρεθούν (άμεσα) τις ιδιοτιμές του πίνακα W_3 III) Να δείξετε ότι $p(1)+p(\omega)+p(\omega^2)=3\alpha_0$ όπου $\omega = συν\frac{2\pi}{3} + iημ\frac{2\pi}{3}$.

Θ 2): α) Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $n \geq 2$ με $rank(A)=1$. I) Αν λ ιδιοτιμή του A με γεωμετρική πολλαπλότητα $g(\lambda)$ και αλγεβρική πολλαπλότητα $\alpha(\lambda)$, εξηγείστε γιατί $\lambda=0$ είναι ιδιοτιμή του A και δείξτε ότι $g(0)=n-1$.
II) Αν $\alpha(0)=n-1$, δείξτε ότι trA είναι η μοναδική μη μηδενική ιδιοτιμή;

β) Έστω ο πίνακας $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. I) Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα A^*A είναι μη αρνητικές. II) Αν $Tr(A^*A)=0$ δείξτε ότι όλες οι ιδιοτιμές το πίνακα A^*A είναι μηδενικές.

Θ.3): Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. I) Να εκφρασθεί ο δείκτης κατάστασης $k_2(A)$ συναρτήσει των ιδιαζουσών τιμών του A.
II) Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός πίνακας αποδείξτε ότι $k_2(A) = \left|\frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}\right|$ όπου $\lambda_{max}(A)$, $\lambda_{min}(A)$ η μέγιστη, αντίστοιχα ελάχιστη ιδιοτιμή του A.
III) Έστω $A = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \varepsilon \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $0<\varepsilon<1$, να υπολογισθεί ο $k_2(A)$.
IV) Δίνεται το σύστημα $A\bar{x}=\bar{b}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, αντιστρέψιμος πίνακας. Αν διατάραξη του $\bar{b}$ κατά $\delta\bar{b}$, προκαλεί διατάραξη της λύσης $\bar{x}$ κατά $\delta\bar{x}$ να δειχθεί ότι: $\frac{\|\delta\bar{b}\|}{\|\bar{b}\|} \leq k(A)\frac{\|\delta\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$.

Θ.4) α) Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και ένας A-αναλλοίωτος υπόχωρος $\{\bar{0}\} \neq \mathcal{V} \subsetneq \mathbb{R}^n$ με $\dim\mathcal{V} = r < n$. Δείξτε ότι υπάρχει ιδιοδιάνυσμα $\bar{u}$ του A με $\bar{u} \in \mathcal{V}$.

β) Ενός πίνακα $A \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι: $\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^4\cdot(\lambda-3)^3$ και το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $m(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2$.
Να εκφρασθούν οι πιθανές κανονικές μορφές Jordan του A.

Σημείωση: ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ.