ΜΑΘΗΜΑ: ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ **ΑΘΗΝΑ 19.6.1997**

ΘΕΜΑ 1. α) Εστω $A = \begin{bmatrix} 16 & 4 & 8 & 4 \\ 4 & 10 & 8 & 4 \\ 8 & 8 & 12 & 10 \\ 4 & 4 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{bmatrix} 32 \\ 26 \\ 38 \\ 30 \end{bmatrix}$

(i) Δείξτε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος και υπολογίστε τον παράγοντα Cholesky.

(ii) Να επιλυθεί το σύστημα $A\vec{\chi} = \vec{b}$ με χρήση του (i).

β) Να επιλυθεί με QR ανάλυση το σύστημα: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

ΘΕΜΑ 2. α) Εστω $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$. Να δειχθεί ότι ο A διατηρεί την l_2-norm (δηλ. $||A\vec{\chi}||_2 = ||\vec{x}||_2$ $\forall \vec{x} \in \mathcal{R}^{n}$) τότε και μόνο τότε αν A ορθογώνιος. β) Να υπολογισθούν οι ιδιάζουσες τιμές και τα αριστερά και δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ γ) Να ορισθεί συνάρτηση MATLAB που βρίσκει την τάξη πίνακα με χρήση της εσωτερικής συνάρτησης $[U,S,V] = svd(A)$ όπου $A = USV^T$ η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών ενός πίνακα A.

ΘΕΜΑ 3. α) Εστω $A \in \mathcal{R}^{n\times n}$ (ή $C^{n\times n}$), $\lambda_0 \in \sigma(A)$ και p ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο ισχύει: $Ker(A-\lambda_0 I_n)^p = Ker(A-\lambda_0 I_n)^{p+1}$. Να δειχθεί ότι: $Ker(A-\lambda_0 I_n)^j = Ker(A-\lambda_0 I_n)^{j+1} \forall j > p$. β) Ενός πίνακα $A \in \mathcal{R}^{8\times 8}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι: $\varphi(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda-3)^5$. Δίνεται επίσης ότι: $rank(A-2I_8) = 6$, $rank(A-3I_8) = 5$, $rank(A-3I_8)^2 = 3$. Ζητούνται:

(i) Να δοθεί και να αιτιολογηθεί η κανονική μορφή Jordan του A.

(ii) Να βρεθεί το ελάχιστο πολυώνυμο του A.

(iii) Να αιτιολογηθεί γιατί ο A είναι αντιστρέψιμος και να δειχθεί ότι: $A^{-1} = \frac{1}{36}(-A^3 + 10A^2 - 37A + 60I_8)$.

ΘΕΜΑ 4. α) Αν $A, B \in \mathcal{R}^{n\times n}$ και $A^T B = 0$ να δειχθεί ότι: $colspA \perp colspB$. β) Υποθέτουμε ότι ο πίνακας $A \in \mathcal{R}^{3\times 3}$ έχει ιδιοτιμές $0, 1, 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\vec{v_0}, \vec{v_1}, \vec{v_2}$.

(i) Περιγράψτε τον $KerA$.

(ii) Περιγράψτε το χώρο στηλών του A, $R(A)$.

(iii) Δείξτε ότι η εξίσωση $A\vec{x} = \vec{v_0}$ δεν έχει λύση.

ΘΕΜΑ 5. α) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 10 \\ -1 & 5 & 9 \end{bmatrix}$