

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

6/1998

Θέμα 1ο

- α) Εστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας ταυτοδύναμος πίνακας ($A^2 = A$). Να δείξετε ότι κάθε ιδιοτιμή του A είναι 0 ή 1.
 β) Εστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ πίνακας μηδενοδύναμος, με δείκτη μηδενοδουναμίας q . Δείξτε ότι ο A έχει ως μόνη ιδιοτιμή το μηδέν.
 γ) Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές ενός Ερμιτιανού, μοναδιαίου (unitary) πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ είναι -1 και +1.

Θέμα 2ο.

- α) Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Να δείχθει ότι

$$\|A\|_2 = \frac{\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + 1} + \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 1}}{2}$$

- β) Εστω A συμμετρικός πίνακας με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Αποδείξτε ότι οι ιδιάζουσες τιμές του A είναι $|\lambda_i|, i = 1, \dots, n$

Θέμα 3ο.

- Εστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ένας μπλοκ διαγώνιος πίνακας $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$, όπου $A_{11} \in \mathbb{C}^{i \times j}$, $A_{22} \in \mathbb{C}^{i \times i}$, $j + i = n$

- α) Αν λ ιδιοτιμή του A_{11} με ιδιοδιάνυσμα $\tilde{u} \in \mathbb{C}^j$, δείξτε ότι υπάρχει $\tilde{w} \in \mathbb{C}^i$ έτσι ώστε το $\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$ να είναι ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ .
 β) Αν λ ιδιοτιμή του A_{22} με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα \tilde{w} , όπου το λ δεν είναι ιδιοτιμή του A_{11} , δείξτε ότι υπάρχει μοναδικό $\tilde{u} \in \mathbb{C}^j$ έτσι ώστε το $\begin{bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{w} \end{bmatrix}$ να είναι ιδιοδιάνυσμα του A με αντίστοιχη ιδιοτιμή λ .

Θέμα 4ο.

- α) Δίνεται ο πίνακας $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ Να προσδιορισθεί η τάξη rank του πίνακα

i) προσδιορίζοντας την κανονική μορφή του A

ii) Χρησιμοποιώντας την ανάλυση ιδιάζουσών τιμών του.

- β) Εστω το γραμμικό σύστημα $A\tilde{x} = \tilde{b}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μη ιδιάζων, $\tilde{b} \in \mathbb{R}^n - \{0\}$. Αν διατάραξη $\delta\tilde{b}$ του διανύσματος \tilde{b} , προκαλεί διατάραξη κατά $\delta\tilde{x}$ του \tilde{x} να δείχθει ότι:

$$\frac{1}{k(A)} \frac{\|\delta\tilde{b}\|}{\|\tilde{b}\|} \leq \frac{\|\delta\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} \leq k(A) \frac{\|\delta\tilde{b}\|}{\|\tilde{b}\|}$$

όπου $\|\cdot\|$ οποιαδήποτε διανυσματική νόρμα και $k(A)$ ο δείκτης

κατάστασης του A ως προς την νόρμα πινάκων που επάγεται από την διανυσματική νόρμα $\|\cdot\|$.

Θέμα 5ο.

- α) Εστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $m_\mu(\lambda)$ το ελάχιστο πολυώνυμο του A και $f(\lambda)$ ένα πολυώνυμο με συντελεστές από το \mathbb{C} . Αν $f(\lambda), m(\lambda)$ είναι πρώτα (δηλ. $\text{MKΔ}(f(\lambda), m(\lambda)) = 1$) να δείχθει ότι ο πίνακας $f(A)$ είναι αντιστρέψιμος.

- β) Να δείχθει ότι ο πίνακας αναπαράστασης ενός εσωτερικού γινομένου ως προς μια ορθογώνια βάση είναι διαγώνιος. Ποιός είναι ο πίνακας αναπαράστασης ενός εσωτερικού γινομένου ως προς μία ορθοκανονική βάση;

Απαντήστε σε 4 από τα 5 θέματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ