ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι
Θέματα εξετάσεων της 03/02/2006

1. Θεωρήστε τη συνάρτηση
$$f(z) = \frac{z^9}{1+z^7}.$$
Υπολογίστε τις παραγώγους $f^{(22)}(0)$ και $f^{(23)}(0)$.

2. Έστω $n \in \mathbb{Z}_+$. Δείξτε ότι οι ρίζες της εξίσωσης
$$(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = 0$$
είναι οι αριθμοί
$$z_k = i\tan\frac{(2k+1)\pi}{4n},\ k = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$
$\left[\text{Υπόδειξη: Θέστε } w = \dfrac{1+z}{1-z}\right].$

3. Σωστό ή λάθος;
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2-i)^n}{3^n n} = -\log\frac{\sqrt{2}}{3} - i\frac{\pi}{3}.$$

4. Δείξτε ότι
$$\int_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z}\, dz = 2\pi i$$
και εν συνεχεία, οτι
$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)\, dt = \pi, \quad a \in \mathbb{R}.$$

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα
$$\int_\gamma \frac{z^3-1}{(z+1)(z^2-4)(z+i)}\, dz,$$
όπου $\gamma(t) = -1 + \frac{3}{2}e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$.

6. (α′) Εξετάστε αν οι συναρτήσεις
$$f(z) = \frac{1}{z} \text{ και } g(z) = \frac{\sin z}{z^3},\ z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$
έχουν παράγουσα στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(β′) Έστω $\mathcal{A}$ η οικογένεια όλων των ανοικτών δίσκων και ανοικτών τετραγώνων του μιγαδικού επιπέδου. Δείξτε ότι αν $D_1,\ D_2 \in \mathcal{A}$, τότε κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f : D_1 \cup D_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ έχει παράγουσα (στο $D_1 \cup D_2$).

ΑΠΑΝΤΗΣΤΕ ΣΕ ΠΕΝΤΕ ΘΕΜΑΤΑ

Οι απαντήσεις σας πρέπει να είναι πλήρεις και σαφείς και να περιέχουν τη διατύπωση των σχετικών θεωρημάτων.

Διάρκεια εξέτασης: 3 ώρες

Λύσεις

1. Γνωρίζουμε ότι
$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad \text{για } |z|<1.$$

Άρα,
$$\frac{1}{1+z^7} = \frac{1}{1-(-z^7)} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-z^7)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{7n} \quad \text{για } |z|<1,$$

αφού $|z|<1 \Longrightarrow |-z^7| = |z^7| = |z|^7 < 1$.
Επομένως,
$$f(z) = \frac{z^9}{1+z^7} = z^9 \cdot \frac{1}{1+z^7} = z^9 \cdot \frac{1}{1-(-z^7)} = z^9 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{7n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n z^{7n+9}.$$

Άρα, $\frac{f^{(22)}(0)}{22!} = 0 \Longrightarrow f^{(22)}(0) = 0$ και $\frac{f^{(23)}(0)}{23!} = (-1)^2 = 1 \Longrightarrow f^{(23)}(0) = 23!$.

2.
$$(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = 0 \iff (1+z)^{2n} = -(1-z)^{2n} \iff \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n} = -1.$$

Θέτουμε $w := \left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ και άρα έχουμε την εξίσωση
$$w^{2n} = -1.$$

$$\begin{aligned} w^{2n} &= -1 \iff w^{2n} = e^{(2k+1)\pi i} \\ \iff w &= \left(e^{(2k+1)\pi i}\right)^{\frac{1}{2n}} \\ \iff w &= e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}},\ 0 \le k \le n-1. \end{aligned}$$

Όμως, $w := \left(\frac{1+z}{1-z}\right) \iff z = \left(\frac{w-1}{w+1}\right)$.

Άρα, οι λύσεις της εξίσωσης $(1+z)^{2n} + (1-z)^{2n} = 0$ είναι οι
$$z = \frac{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}} - 1}{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}} + 1},\ 0 \le k \le n-1.$$

Από τους τύπους
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \text{ και } \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

έχουμε ότι

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{-iz}+e^{-iz}} = \frac{1}{i}\frac{e^{2iz}-1}{e^{-2iz}+1} \Longrightarrow i\tan z = \frac{e^{2iz}-1}{e^{-2iz}+1}.$$

Επομένως,

$$z = \frac{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}}-1}{e^{\frac{(2k+1)\pi i}{2n}}+1} = i\tan\frac{(2k+1)\pi}{4n},\ 0 \le k \le n-1.$$

3. Γνωρίζουμε ότι

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1},\ |z|<1. \quad (*)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2-i)^n}{3^n n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\frac{(2-i)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left(-\frac{2-i}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{2-i}{3}\right)^n =$$

$$= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{2-i}{3}\right)^n. \quad (**)$$

Όμως,

$$\left|\frac{2-i}{3}\right| = \left|\frac{2}{3}-i\frac{1}{3}\right| = \sqrt{\frac{4}{9}+\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} < 1.$$

Άρα,

$$\stackrel{(*),(**)}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2-i)^n}{3^n n} = -\log\left(1+\frac{i-2}{3}\right) = -\log\left(\frac{1}{3}+\frac{i}{3}\right) =$$

$$= -\left[\log\left|\frac{1}{3}+\frac{i}{3}\right| + i\arg\left(\frac{1}{3}+\frac{i}{3}\right)\right] = -\log\sqrt{\frac{2}{9}} - i\frac{\pi}{4}.$$

4.

$$\int_{|z|=1}\frac{e^{az}}{z}\,dz = \int_{C(0,1)}\frac{e^{az}}{z}\,dz.$$

Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy, έχουμε:

$$\int_{C(0,1)}\frac{e^{az}}{z}\,dz = 2\pi i\cdot\delta_{C(0,1)}(0)f(0) = 2\pi i,\ \text{όπου } f(z)=e^{az}.$$

Ακολούθως, παίρνοντας παραμέτρηση του $C(0,1)$ έχουμε ότι

$$2\pi i = \int_{|z|=1}\frac{e^{az}}{z}\,dz = \int_0^{2\pi}\frac{e^{ae^{it}}}{e^{it}}ie^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi}e^{ae^{it}}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{a(\cos t + i\sin t)}\, dt = i\int_0^{2\pi} e^{a\cos t} e^{ia\sin t}\, dt =$$

$$i\int_0^{2\pi} e^{a\cos t}(\cos(a\sin t) + i\sin(a\sin t))\, dt =$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)\, dt - \int_0^{2\pi} e^{a\cos t}\sin(a\sin t)\, dt$$

Άρα,

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos t}\sin(a\sin t)\, dt = 0 \ \text{ και } \ i\int_0^{2\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)\, dt = 2\pi i,$$

δηλ.

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)\, dt = 2\pi \Longrightarrow \int_0^{\pi} e^{a\cos t}\cos(a\sin t)\, dt = \pi.$$

[Λόγω συμμετρίας των συναρτήσεων που βρίσκονται μέσα στο ολοκλήρωμα].