Μαθηματικά IV α (17-9-98)

(1) **Θέμα 1:** Να γραφούν οι Διαφορικές Εξισώσεις των δυναμικών γραμμών του ηλεκτροστατικού πεδίου που δημιουργείται από ένα σημειακό φορτίο Q, ακίνητο στην αρχή των αξόνων. Ολοκληρώνοντας αυτές τις Δ.Ε. προσδιορίστε τις δυναμικές γραμμές

(1) **Θέμα 2:** Να εξηγηθεί η φυσική σημασία της Λαπλασιανής Δu κάποιου μεγέθους $u = u(x,y,z)$

(1) **Θέμα 3:** Υπό ποιές προυποθέσεις μπορούμε·

(α) να ολοκληρώσουμε όρο προς όρο μια σειρά Fourier; πάντα $\forall x$

(β) να παραγωγίσουμε » » » » » » ; συνεχής περιοδική

1) **Θέμα 4:** Δείξτε ότι αν $\{\phi_i(x) \mid i=1,2,\dots\}$ είναι ένα πλήρες ορθοκανονικοποιημένο σύνολο συναρτήσεων και $f(x) = \sum_i \alpha_i \phi_i(x)$, $g(x) = \sum_j \beta_j \phi_j(x)$ είναι τα αναπτύγματα δύο μιγαδικών συναρτήσεων f και g ως προς αυτό το πλήρες σύνολο, τότε το εσωτερικό γινόμενο (f,g) ισούται προς: $(f,g) = \sum \alpha_i^* \beta_i$

2.5 **Θέμα 5:** Να βρεθεί η συνάρτηση $u(x,y)$ η οποία (α) ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace στο εσωτερικό του Θεμελιώδους πεδίου $\Omega = \left\{\begin{matrix} 0<x<\alpha \\ 0<y<\beta \end{matrix}\right\}$ (β) ισούται προς $\sin\left(\pi \frac{y}{\beta}\right)$ πάνω στον άξονα των y και (γ) ισούται προς μηδέν πάνω στις άλλες πλευρές του $\partial\Omega$

(0.5) **Θέμα 6:** Ξεκινώντας από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier υπολογίστε τη μετασχηματισμένη Fourier της "συνάρτησης" $\delta(x)$ του Dirac·

(1) **Θέμα 7:** Να αποδειχτεί ο τύπος που δίνει τους συντελεστές α_m του αναπτύγματος $f(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m J_n\left(\lambda_{nm} \frac{\rho}{a}\right) \quad 0 \leq \rho \leq a$

(2) **Θέμα 8:** Να λυθεί το εξής πρόβλημα:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x,y) \in (-\infty,\infty) \times (-\infty,\infty)$$

$u(x,0) = f(x)$ όπου $f(x)$ γνωστή συνάρτηση·

$$u(x,y) \xrightarrow[y \to \infty]{} 0$$

Υποθέστε ότι υπάρχουν οι μετασχηματισμοί Fourier των u, u_x, u_{xx} και της $f(x)$ ως προς τη μεταβλητή x.