(A)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ IV Β
4 - 7 - 1997

ΘΕΜΑ 1: Να αποδειχθεί ότι

(1 μ.) α) $\displaystyle\int_0^{\pi+2i} \cos\frac{z}{2}\,dz = e + \frac{1}{e}$

(1 μ) β) Το ανωτέρω ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου που συνδέει τα σημεία 0 και $\pi+2i$

ΘΕΜΑ 2: (2 μ) Να επαληθευτούν οι συνθήκες Cauchy - Riemann για την συνάρτηση $f(z) = \cos 2z$.

ΘΕΜΑ 3: (2 μ) Δίνεται η καμπύλη $|z| = \frac{1}{2}$ του z-επιπέδου. Να βρεθεί ο τόπος στο w-επίπεδο στον οποίο απεικονίζεται η καμπύλη αυτή με τον μετασχηματισμό $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.

ΘΕΜΑ 4: (2 μ) Να βρεθούν οι γενικές εκφράσεις των αναπτυγμάτων Laurent της συνάρτησης $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ γύρω από το σημείο $z_0 = i$.

ΘΕΜΑ 5: Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

(1 μ) α) $\displaystyle\int_C z^n e^{\frac{2}{z}}\,dz$, όπου $n \in \mathbb{Z}$ και C η καμπύλη $|z| = \rho$

(1 μ) β) $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{(z-1)(z-2)^2}$ όπου C η καμπύλη $|z-2| = \frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 6: Δίνεται η συνάρτηση $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$ η οποία ορίζεται στην περιοχή $|z-1| \leq 1$.

(1 μ) α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της $|f(z)|$ στην περιοχή αυτή.

(1 μ) β) Να αποδειχθεί η ανισότητα Cauchy για την δοθείσα