ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ — ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1999 ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ
"ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Ι"

διδάσκων: Ι. Στρατής

Σε κάθε ερώτημα αναφέρονται οι μονάδες που παίρνει. Άριστα = 10

1 (Μον. 20) Να λυθεί το πρόβλημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 2, & 0<x<1,\ t>0, \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, & 0\le x\le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t\geq 0. \end{cases}$$

2 (Μον. 20) Να λυθεί το πρόβλημα:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στον κύκλο κέντρου } O \text{ και ακτίνας } R \ (\text{στο } \mathbb{R}^2) \\ u(R,\phi) = \cos^2\phi, & -\pi\le\phi\le\pi. \end{cases}$$

3 (Μον. 20) Να ταξινομηθεί, να βρεθεί η κανονική μορφή και η γενική λύση της εξίσωσης:

$$x^m u_{xx} - u_{yy} + \frac{m}{2}x^{m-1}u_x = 0.$$

4 (Μον. 5) Αν η $u(x,t)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R},$$

να δειχθεί ότι και η $v(x,t) := u(\underbrace{\alpha x}_{w}, \underbrace{\alpha^2 t}_{z})$, $\alpha>0$: σταθερά, είναι επίσης λύση.

5. (Μον. 10) Έστω u, v αρμονικές συναρτήσεις σ' έναν φραγμένο τόπο Ω του $\mathbb{R}^2$. Έστω α, β σταθερές, τέτοιες ώστε $\alpha \le u - v \le \beta$, επί του $\partial\Omega$. Να δειχθεί ότι $\alpha \le u - v \le \beta$, στον Ω.

(6) (Μον. 15) Να δειχθεί ότι το πρόβλημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} - k\,\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad 0<x<\ell \ , \ t>0, \\ u(x,0) = f(x) \ , \quad 0 \le x \le \ell, \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \quad , t \ge 0, \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση.

(Υπόδειξη: Έστω u_1, u_2 λύσεις και $v := u_1 - u_2$. Με τη χρήση της $I(t) := \frac{1}{2k}\int_0^{\ell} v^2(x,t)\,dx$, να δειχθεί ότι $v \equiv 0$.)

(7) (Μον. 15) Να βρεθεί η λύση $z = z(x,y)$ της εξίσωσης

$$x^2 z_x + z z_y = 1,$$

που επί της αρχικής καμπύλης $x+y=1$, $x>0$, έχει τιμή $z=0$.

(8) (Μον. 15) Να βρεθεί η λύση του συντηρητικού νόμου

$$z z_x + z_y = 0,$$

που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη $z(x,0) = -x$. Επίσης να μελετηθεί το πιο πάνω π.α.τ. ως προς την ανάπτυξη κρουστικών κυμάτων.

Καλή Επιτυχία