ΘΕΜΑ 1° (1,5 μονάδα)

Έστω $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{C}$ $w_1 \neq 0, w_2 \neq 0, \ldots, w_n \neq 0$ και $\gamma \leq \arg w_i \leq \gamma + \delta$, $\delta < \pi$, $i = 1, \ldots, n$. Δείξτε ότι $\sum_{i=1}^{n} w_i \neq 0$.

ΘΕΜΑ 2° (1 μονάδα)

Δίδεται $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (Ω ανοικτό) με συνεχείς μερικές παραγώγους και γιά κάθε $z \in R$ ισχύει

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{ih}$$

. Δείξτε ότι η f είναι ολόμορφη.

ΘΕΜΑ 3° (1 μονάδα)

Δείξτε ότι

$$|1 - (1-z)e^{z}| \leq |z|^2 \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C} \text{ μέ } |z| \leq 1.$$

ΘΕΜΑ 4° (1 μονάδα)

Δείξτε ότι η ολόμορφη συνάρτηση $f(z) = e^{2\pi i z} - 1$ $z \in \mathbb{C}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στό διάστημα $[0,1]$ ενώ δέν ικανοποιεί τό συμπέρασμα.

ΘΕΜΑ 5ο (1,5 μονάδες)

α) Ορίστε το δείκτη στροφής κλειστής καμπύλης και αποδείξτε ότι παίρνει ακέραιες τιμές

β) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη γ κλειστή καμπύλη με $\gamma^* \subseteq \Omega$ ώστε $f(z) \neq 0$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Πως συνδέεται το ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$ με την έννοια του δείκτου στροφής ;

ΘΕΜΑ 6ο (1-μονάδα)

Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ολόμορφη επέκταση της πραγματικής συνάρτησης $\log x$, $x>0$ στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

ΘΕΜΑ 7ο (1-μονάδα)

Δίδεται f ολόμορφη στον ανοιχτό δίσκο $D=(0,R)$ και συνεχής στην περιφέρεια $C(0,R)$ και $z_0 \in D$. Δείξτε ότι

$$|f(z_0)| \leq M(R-|z_0|)$$

οπου M το φράγμα της f στην περιφέρεια $C(0,R)$.

ΘΕΜΑ 8ο (1-μονάδα)

Δίδετε η δυναμοσειρά $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $a_n \in \mathbb{R}$ και $a_n \neq 0$ για $n=0,1,\cdots$ με ακτίνα σύγκλισης $R=+\infty$. Δείξτε ότι ο περιορισμός της f στο άνω ημιεπίπεδο δεν είναι φραγμένη συνάρτηση

ΘΕΜΑ 9ο (1,5 μονάδα)

Δίδοντε $f_1, f_2, f_3 : \Omega \to \mathbb{C}$ αναλυτικές (Ω είναι τόπος). και για κάθε ζεύγος $\kappa, \lambda \in \{1,2,3\}$ $\kappa \neq \lambda$ υπάρχει $z \in R$ με $f_\kappa(z) \neq f_\lambda(z)$. Δείξτε ότι υπάρχει $z_0 \in R$ ώστε

$$f_1(z_0) \neq f_2(z_0) \neq f_3(z_0) \neq f_1(z_0).$$

ΘΕΜΑ 10 (2-μονάδες)

Έστω πολυώνυμο $P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n$ ώστε

$$|P(z)| \leq 1 \quad \text{γιά κάθε } |z| = 1.$$

i) Δείξτε ότι $|\alpha_k| \leq 1$ γιά $k = 0, 1, \dots, n$,

ii) $|P(z)| \leq |z|^n$ για κάθε $|z| \geq 1$