

Εξετάσεις στην Μιγαδική Ανάλυση Ι 11-7-07.

1<sup>ο</sup> (α) Έστω  $\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ . (i) Υπολογίστε την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ . (ii) Αποδείξτε ότι  $c_0 = c_1 = 1$  και  $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ , για  $n \geq 2$ .

(β) Να ευρεθούν όλες οι τιμές της δύναμης  $(-1)^z$ .

2<sup>ο</sup> (α) Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor με κέντρο το  $b \in \mathbb{C}$  η συνάρτηση  $f(z) = e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

(β) Αποδείξτε ότι  $\forall r > 0$  υπάρχει  $N \in \mathbb{N}$  ώστε  $\forall n \geq N$  το πολυώνυμο  $P_n(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$ , δεν έχει καμία ρίζα στον δίσκο  $\Delta(0, r)$ .

3<sup>ο</sup> (α) Έστω  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ακέραια συνάρτηση. Αν η  $f$  δεν παίρνει καμία τιμή στον κύκλο  $C(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| = r\}$  ( $\alpha \in \mathbb{C}, r > 0$ ), τότε η  $f$  είναι σταθερή.

(β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα  $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2 + b^2}$ ,  $b > 0$ .

4<sup>ο</sup> (α) Αποδείξτε ότι η μόνη ακέραια συνάρτηση  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  που ικανοποιεί τις συνθήκες  $f'(z) = f(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$  και  $f(0) = 1$ , είναι η  $f(z) = e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

(β) Αποδείξτε ότι όλες οι ρίζες της εξίσωσης,  $(1+z)^n + (1-z)^n = 0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) είναι οι  $z_k = i \tan \frac{2k+1}{4n} \pi$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2n-1$ .

5<sup>ο</sup> (α) Να ευρεθούν όλες οι τιμές του  $\log(-e)$ .

(β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\frac{1}{2i} \int_{C(r)} \bar{z} dz$ , ( $r > 0$ ).  
Ερμηνεύστε γεωμετρικά το αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας το Θώρημα του Green.

6<sup>ο</sup> (α) Έστω  $f, g: \Delta(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  ολόμορφες συναρτήσεις με  $f(z) \neq 0$  και  $g(z) \neq 0 \forall z \in \Delta(0, 1)$ , ώστε,  $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{g'(z)}{g(z)}$ , για  $z \in \Delta(0, 1)$ .  
Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά  $\lambda \in \mathbb{C}$  ώστε,  $f(z) = \lambda g(z)$  για κάθε  $z \in \Delta(0, 1)$ .

(β) Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent η συνάρτηση  $f(z) = \frac{3}{z+z-z^2}$ , στον δακτύλιο  $1 < |z| < 2$ .

Απαντήστε σε 5 θέματα.