ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ Ι

10/9/2007

Θέμα 1. α) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \Omega$ και $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι

$$\int_\gamma f(z) g'(z)\,dz = f\cdot g|_\gamma - \int_\gamma f'(z) g(z)\,dz,$$

όπου $f\cdot g|_\gamma = (f\cdot g)(\gamma(b)) - (f\cdot g)(\gamma(a))$.

β) Υπολογίστε τό ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\text{συν}\theta}\,d\theta$.

Θέμα 2. α) (i) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ σύνολο ανοικτό και κυρτό, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση ώστε $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ γιά κάθε τρίγωνο $T \subseteq \Omega$. Αποδείξτε ότι ή f έχει παράγουσα στό Ω. (ii) Περιγράψτε τά βήματα τής απόδειξης ότι άν $G \subseteq \mathbb{C}$ είναι ανοικτό σύνολο και $g : G \to \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση, τότε ή g' είναι επίσης ολόμορφη.

β) Έστω $h(z) = \frac{1}{\eta\mu(\pi z)} e^{\frac{1}{1+z^2}}$. Εύρετε τήν ακτίνα σύγκλισης τής δυναμοσειράς

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^{(n)}(1+2i)}{n!} z^n.$$

Θέμα 3. α) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $\gamma : [a,b] \to \Omega$ κλειστή καμπύλη μέ $f(\zeta) \neq 0$ γιά κάθε $\zeta \in [\gamma]$. Αποδείξτε ότι ο αριθμός $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ είναι ακέραιος.

β) Έστω $a, b \in \mathbb{C}$ με $|a| \neq |b|$. Υπολογίστε τό ολοκλήρωμα $\int_\gamma \frac{1}{az+b}\,dz$, όπου $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C} : \gamma(t) = e^{it}$.

Θέμα 4. α) Έστω $r>0$, $g : \Delta(0,0,r) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $m \in \mathbb{N}$ ώστε $|g(z)| \geq \frac{1}{|z|^m}$ γιά κάθε $z \in \Delta(0,0,r)$. Αποδείξτε ότι τό 0 είναι πόλος τής g τάξης $\geq m$.

β) Έστω f ακεραία συνάρτηση, $n \in \mathbb{N}$ και $R>0$ ώστε $|f(z)| \geq |z|^n$ γιά κάθε z μέ $|z|>R$. Αποδείξτε ότι ή f είναι πολυώνυμο βαθμού $\geq n$.

Θέμα 5. α) Έστω $\{c_n\}$ φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Αποδείξτε ότι (1) ή δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R \geq 1$, και (2) ή δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $\rho = +\infty$.

β) Υπολογίστε τό ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$.

Θέμα 6. α) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση, $a \in \Omega$, $r>0$ με $\overline{\Delta}(a,r) \subseteq \Omega$, και $M>0$ ώστε $|f(\zeta)| \leq M$ γιά κάθε $\zeta \in C(a,r)$. Αποδείξτε ότι $|f'(z)| \leq \frac{4M}{r}$ για καθε $z \in \overline{\Delta}(a, r/2)$. [Υποδ. Εφαρμόστε τόν ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy γιά τήν f'].

β) Υπολογίστε τό ολοκλήρωμα $\int_{C(0,1)} \frac{1}{(e^z-1-z)\,\eta\mu z}\,dz$.

Απαντήστε σέ 5 θέματα

Καλή επιτυχία!