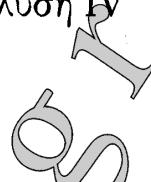


# Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής I και Ανάλυση IV

Εξετάσεις 10 Οκτωβρίου 1997



**ΘΕΜΑ 1 (α)** Δίδεται  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Αν  $\omega$  είναι μια  $n$ -οστή ρίζα της μονάδας και  $\omega \neq 1$ , να δειχθεί ότι

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

(β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση  $u(x, y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin y$  είναι το πραγματικό μέρος μιάς ολόμορφης συνάρτησης.

**ΘΕΜΑ 2** Να βρεθεί η ακτίνα σύγχλισης  $R$  της δυναμοσειράς

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

καθώς και η  $f'(z)$ . Τι μπορείτε να πείτε για την δυναμοσειρά αυτή όταν  $|z| > R$ ;

**ΘΕΜΑ 3 (α)** Να βρεθούν και να ταξινομηθούν σε ανώμαλίες (επουσιώδεις, ουσιώδεις, πόλοι) τών συναρτήσεων  $f(z) = \frac{z}{\sin z}$  και  $g(z) = \cos(\frac{1}{z-1})$ .

(β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} e^{it} dt.$$

**ΘΕΜΑ 4 (α)** Να βρεθούν οι σειρές Laurent της συνάρτησης  $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$  στους δακτυλίους  $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$  και  $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$ .

(β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $\varphi(z) = \frac{2z-1}{2-z}$  απεικονίζει τον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο  $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  σύμμορφα και επί του εαυτού του.

**ΘΕΜΑ 5 (α)** Να υπολογισθεύνται ολοκληρώματα

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta} \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{1+x^2} dx.$$

(β) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $f(x) = \exp(-\frac{x^2}{2})$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

Να γράψετε τα πολύ 4 θέματα. Από τα θέματα 4 και 5 απαντήστε ή στο ερώτημα (α) ή στο (β) (όχι και στα δύο).

Σημειώστε ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΩΣ στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τα θέματα που επιχειρήσατε, βάζοντας σε κύκλο τους αντίστοιχους αριθμούς.

Καλή επιτυχία!