

Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής Ι και Ανάλυση ΙV

Εξετάσεις 10 Οκτωβρίου 1997

ΘΕΜΑ 1 (α) Δίδεται $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Αν ω είναι μια n -οστή ρίζα της μονάδας και $\omega \neq 1$, να δειχθεί ότι

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

(β) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u(x, y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \sin y$ είναι το πραγματικό μέρος μίας ολόμορφης συνάρτησης.

ΘΕΜΑ 2 Να βρεθεί η ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n^2}$$

καθώς και η $f'(z)$. Τι μπορείτε να πείτε για την δυναμοσειρά αυτή όταν $|z| > R$;

ΘΕΜΑ 3 (α) Να βρεθούν και να ταξινομηθούν οι ανωμαλίες (επουσιώδεις, ουσιώδεις, πόλοι) των συναρτήσεων $f(z) = \frac{z}{\sin z}$ και $g(z) = \cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$.

(β) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{it}} dt.$$

ΘΕΜΑ 4 (α) Να βρεθούν οι σειρές Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ στους δακτυλίους $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ και $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

(β) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $\varphi(z) = \frac{2z-1}{2-z}$ απεικονίζει τον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ σύμμορφα και επί του εαυτού του.

ΘΕΜΑ 5 (α) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 + \cos \theta} \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix}}{1+x^2} dx.$$

(β) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ ($x \in \mathbb{R}$).

Να γράψετε το πολύ 4 θέματα. Από τα θέματα 4 και 5 απαντήστε ή στο ερώτημα (α) ή στο (β) (όχι και στα δύο).

Σημειώστε **ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΩΣ** στην πρώτη σελίδα του γραπτού σας τα θέματα που επιχειρήσατε, βάζοντας σε κύκλο τους αντίστοιχους αριθμούς.

Καλή επιτυχία!