ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ~~ΦΥΣΙΚΗΣ~~ I

(ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΟ)

3-2-2000

Θέμα 1ο. (i) Να αναπτύξετε την συνάρτηση $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ σε σειρά Laurent με κέντρο το 0 σ' όλους τους δακτυλίους όπου είναι δυνατόν. **(ii)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{|z|=r}\frac{dz}{(z-1)(z-2)}$, για $r>0$, $r\neq 1$ και $r\neq 2$.

Θέμα 2ο. (i) Να βρείτε σύμμορφο μετασχηματισμό που απεικονίζει το χωρίο $D: -\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{6}$ επί του μοναδιαίου δίσκου $|w|<1$, αφού χρησιμοποιήσετε αρχικά κατάλληλο μετασχηματισμό που απεικονίζει το χωρίο D στο δεξί ημιεπίπεδο και κατόπιν κατάλληλο Möbius. **(ii)** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z-\frac{1}{2}}dz$.

Θέμα 3ο. (i) Να δείξετε ότι χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $w=\frac{1}{z}$, οι ευθείες $y=x-1$, $y=0$ απεικονίζονται αντίστοιχα στην περιφέρεια $u^2-v^2-u-v=0$ και στην ευθεία $v=0$. Να σχεδιάσετε τις 4 καμπύλες με τον αντίστοιχο προσανατολισμό τους και να επαληθεύσετε το σύμμορφο της απεικόνισης $w=\frac{1}{z}$ στο σημείο $z=1$ για τις παραπάνω καμπύλες.
(ii) Να λύσετε την εξίσωση $e^z=1+i$.

Θέμα 4ο. (i) Αν $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ είναι αναλυτική συνάρτηση που απεικονίζει τον τόπο Ω στον τόπο G και $h(u,v)$ αρμονική συνάρτηση στο G κλάσης C^2, να δείξετε ότι η συνάρτηση $H(x,y)=h(u(x,y),v(x,y))$ είναι αρμονική στο Ω. **(ii)** Χρησιμοποιώντας ολοκληρωτικά υπόλοιπα να δείξετε ότι: $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi$.

Θέμα 5ο. (i) Να βρείτε το είδος των ιδιαζόντων σημείων της συνάρτησης $f(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}$ και να συμπεράνετε ότι στον δακτύλιο $0<|z|<2\pi$ ισχύει: $f(z)=\frac{b_2}{z^2}+\frac{b_1}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\dots$ **(ii)** Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{z\to 0}\frac{\sin(z^{10})}{z^k}$, για τις διάφορες ακέραιες τιμές του k.

Θέμα 6ο. (i) Να υπολογίσετε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο: $\operatorname{Res}\left(\frac{e^z}{z^2(z-1)},0\right)$.
(ii) Να δείξετε ότι ο μετασχηματισμός $w=\exp z$ απεικονίζει το ορθογώνιο $a<x<b$, $c<y<d$ στο χωρίο: $e^a<\rho<e^b$, $c<\varphi<d$, όταν $w=\rho e^{i\varphi}$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.