

- [1] Δώστε παράδειγμα τόπου $\Omega \subset \mathbb{C}$ και συνάρτησης f , ολόμορφης στο Ω , ούτως ώστε η f να μην έχει παράγουσα στο Ω .
- [1] Αν αναλύσουμε την συνάρτηση $f(z) = 1/z^7(z-1)^5$ σε δυναμοσειρά με κέντρο το σημείο $a = i$, πόση θα είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς αυτής;
- [1] Βρείτε μια σύμμορφη απεικόνιση $f: \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \text{Im } z < \pi\} \rightarrow \Delta(0,1)$, $f(1) = i$ και επι.

4. [1,5] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{C(i,r)} \frac{\sin z}{z^2(2z-\pi)} dz$ για τις διάφορες τιμές του $r > 0$.

5. [1,5] Υπολογίστε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\text{Res} \left(\frac{\sin z}{(e^z - 1)^2}, 0 \right)$.

6. [1,5] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$.

7. [1,5] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$.

8. [1] Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{1+z^{2n}}$ είναι ολόμορφος στον δίσκο $\Delta(0,1)$.

9. [1] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{C(i,y)} \frac{dz}{z^2 \sin(1/z)}$. (Θέσατε $w = 1/z$.)

10. [1,5] Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι αρμονική στο $\mathbb{C} - \{0\}$. Υπάρχει ολόμορφος συνάρτηση f στο $\mathbb{C} - \{0\}$ ώστε $\text{Re } f = u$ στο $\mathbb{C} - \{0\}$; Υπάρχει ολόμορφος συνάρτηση f στο $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ ώστε $\text{Re } f = u$ στο $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$; Υπάρχει ολόμορφος συνάρτηση g στο \mathbb{C} ώστε $\text{Re } g(x+iy) = x^2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

11. [1] Τι είδους ανωμαλία έχει η συνάρτηση $\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ στο σημείο 1; Μελετήστε

το όριο $\lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1) \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \right]$. Δείξτε ότι $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \left[(z-1) \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \right] = 0$. (Γι' αυτό

το τελευταίο χρησιμοποιήστε ότι η απεικόνιση $z \rightarrow w = \frac{z+1}{z-1}$, απεικονίζει τον

δίσκο $\{|z| < 1\}$ στο ημιεπίπεδο $\{\text{Re } w < 0\}$.)

Οδηγίες: 1. Κάθε θέμα θα βαθμολογηθεί 1 ή 1,5 (αυτό αναγράφεται ακριβώς στην αρχή κάθε θέματος). Γράψτε όποια θέματα θέλετε.

2. Να δικαιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας!!

Καλή επιτυχία!