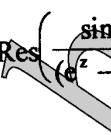
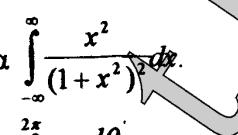
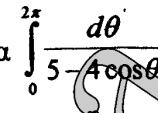
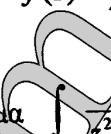
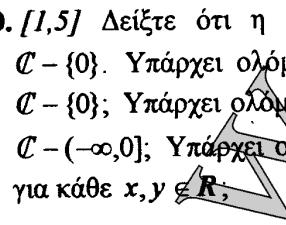
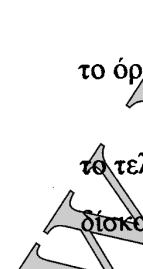


1. [1] Δώστε παράδειγμα τόπου $\Omega \subset \mathbb{C}$ και συνάρτησης f , ολόμορφης στο Ω , ώστε η f να μην έχει παράγουσα στο Ω .
 2. [1] Αν αναλύσουμε την συνάρτηση $f(z) = 1/z^7(z-1)^5$ σε δυναμοδειρά με κέντρο το σημείο $a = i$, πόση θα είναι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοδειράς αυτής;
 3. [1] Βρήτε μια σύμμορφη απεικόνιση $f: \{z \in \mathbb{C}: -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \rightarrow \Delta(0,1)$,  και επι.
 4. [1,5] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{C(i,r)} \frac{\sin z}{z^2(2z-\pi)} dz$ για τις διάφορες τιμές του $r > 0$. 
 5. [1,5] Υπολογίστε το ολοκληρωτικό υπόλοιπο $\operatorname{Res}\left(\frac{\sin z}{(e^z - 1)^3}, 0\right)$. 
 6. [1,5] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$. 
 7. [1,5] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 - 4\cos\theta}$. 
 8. [1] Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nz^n}{1+z^{2n}}$ είναι ολόμορφος στον δίσκο $\Delta(0,1)$. 
 9. [1] Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{C(0,1)} \frac{dz}{z^2 \sin(1/z)}$. (Θέσατε $w = 1/z$.) 
 10. [1,5] Δείξτε ότι η συνάρτηση $u(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι αρμονική στο $\mathbb{C} - \{0\}$. Υπάρχει ολόμορφη συνάρτηση f στο $\mathbb{C} - \{0\}$ ώστε $\operatorname{Re} f = u$ στο $\mathbb{C} - \{0\}$; Υπάρχει ολόμορφης συνάρτηση f στο $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ ώστε $\operatorname{Re} f = u$ στο $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$; Υπάρχει ολόμορφης συνάρτηση g στο \mathbb{C} ώστε $\operatorname{Re} g(x+iy) = x^2$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. 
 11. [1] Τι είδους ανωμαλία έχει η συνάρτηση $\exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ στο σημείο 1; Μελετήστε το όριο $\lim_{z \rightarrow 1^-} (z-1) \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$. Δείξτε ότι $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z|<1}} (z-1) \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = 0$. (Γι' αυτό το τελευταίο χρησιμοποιήστε οτι η απεικόνιση $z \rightarrow w = \frac{z+1}{z-1}$, απεικονίζει τον δίσκο $\{|z| < 1\}$ στο ημιεπίπεδο $\{\operatorname{Re} w < 0\}$.) 
- Οδηγίες:* 1. Κάθε θέμα θα βαθμολογηθεί 1 ή 1,5 (αντό αναγράφεται ακριβώς στην αρχή κάθε θέματος). Γράψτε όποια θέματα θέλετε.
2. Να δικαιογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας!!

Καλή επιτυχία!