ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ ΙΙ

Ιούνιος 2000

Θέμα 1 Δίνεται το πρόβλημα Sturm-Liouville

$\Phi''(x) + \lambda\Phi(x) = 0 \quad ,0 \le x \le L$ και $\Phi(0) = 0, \; L\Phi'(L) = -\Phi(L)$

α) Δείξτε ότι οι ιδιοτιμές λ_n είναι θετικές και δίνονται από την εξίσωση

$$\tan L\sqrt{\lambda_n} = -L\sqrt{\lambda_n} \, ,$$

β) Από το γράφημα της εφαπτομένης δείξτε ότι για $n >> 1$, $(n -> \infty)$ (3)

$$\sqrt{\lambda_n} = (n + 1/2)\frac{\pi}{L}$$

Θέμα 2 Χορδή απείρου μήκους εκτελεί μικρές ταλαντώσεις .Η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - \upsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) = 0$$

Εάν $f(x), g(x)$ η αρχική απομάκρυνση και αρχική ταχύτητα της χορδής , να δείξετε ότι

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+\upsilon t) + f(x-\upsilon t) + \frac{1}{\upsilon}\int_{x-\upsilon t}^{x+\upsilon t} g(z)dz\right) \qquad (3.5)$$

Θέμα 3 Η κατανομή θερμοκρασίας στην κατάσταση θερμικής ισορροπίας για τον ημικυλινδρικό αγωγό ακτίνων $R_1 < R_2$,απείρου μήκους και διατομής ΑΒΓΔ(σχήμα) ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\rho\frac{\partial}{\partial \rho}T(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}T(\rho,\theta) = 0$$

α) Δείξτε ότι κάτω από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων

$\xi = \ln\frac{\rho}{R_1}$, $\theta = \theta$ όπου $0 \le \xi \le \ln\frac{R_2}{R_1}$ και $0 \le \theta \le \pi$

η παραπάνω εξίσωση παίρνει την μορφή

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}T(\xi,\theta) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}T(\xi,\theta) = 0$$

β) Εάν οι κυλινδρικές επιφάνειες είναι θερμικά μονωμένες ενω οι επίπεδες επιφάνειες βρίσκονται σε θερμοκρασίες T_1 και T_2 να βρεθεί η κατανομή θερμοκρασίας $T(\rho,\theta) = T(\xi,\theta)$ μέσα στον αγωγό. (3.5)