

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΦΥΣΙΚΗΣ ΙΙ

(Ιούνιος 1998)

Θέμα 1. Σε χώρο πραγματικών συναρτήσεων $f(x)$, $a \leq x \leq b$, που ικανοποιούν τις συνθήκες $f(a)=f(b)=0$, το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx, \quad w(x) \geq 0$$

i) Δείξτε ότι ο τελεστής $L = -\frac{1}{w(x)} \frac{d}{dx} \left[w(x) \frac{d}{dx} \right]$ είναι αυτοσυζυγής.

ii) Αν $u_1(x)$ και $u_2(x)$ είναι ιδιοσυναρτήσεις του L με ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$, δείξτε ότι $\frac{du_1(x)}{dx}$ και $\frac{du_2(x)}{dx}$ είναι ορθογώνιες.

Θέμα 2. Ομογενές υλικό κυβικού σχήματος και ακμής L , θερμικής αγωγιμότητας $\kappa > 0$, είναι εμβαπτισμένο σε λουτρό θερμοκρασίας μηδέν βαθμών. Εάν μόνο οι έδρες $x=0$ και $x=L$ είναι θερμικά μονωμένες και η αρχική κατανομή θερμοκρασίας του υλικού είναι $T(x, t=0) = T_0 \sin(3\pi y / L) \sin(\pi z / L)$. Να βρεθεί η κατανομή θερμοκρασίας για $t > 0$.

Θέμα 3. Η εξίσωση κίνησης χορδής σε μέσο με τριβές είναι

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

όπου a ο συντελεστής τριβής.

Θεωρούμε χορδή μήκους L πακτωμένη στα άκρα η οποία κάνει ταλαντώσεις σε μέσο με συντελεστή τριβής $0 < a < \pi c / L$.

i) Να βρεθεί η απομάκρυνση της χορδής για κάθε $t > 0$ όταν η αρχική απομάκρυνση είναι $u(x, t=0) = B \sin(2\pi x / L)$ και η αρχική ταχύτητα μηδέν.

ii) Να υπολογισθεί ο ρυθμός απώλειας της ενέργειας.

(Υπόδ. Αναζητήστε λύση της μορφής $u(x,t) = \sum_n A_n(t) \sin(n\pi x / L)$)

Καλή επιτυχία.