ΟΥΡΕΣ ΑΝΑΜΟΝΗΣ – ΜΑΙΟΣ 2005

Θέμα 1ο: (3 βαθμοί) Θεωρούμε την τροποποίηση της M/M/c ουράς με Poisson διαδικασία αφίξεων ρυθμού λ και εκθετικούς χρόνους εξυπηρέτησης με παράμετρο μ, όπου ορισμένοι πελάτες αποχωρούν από το σύστημα αμέσως μόλις αφιχθούν χωρίς να εξυπηρετηθούν (αποθαρρυνόμενοι πελάτες). Συγκεκριμένα, κάθε πελάτης που βρίσκει έναν τουλάχιστον κενό υπηρέτη κατά την άφιξή του, εισέρχεται σε αυτό σίγουρα, ενώ όταν βρει n άλλα άτομα στο σύστημα με $n \geq c$ αναχωρεί άμεσα με πιθανότητα $\frac{n+1-c}{n+1}$.

(α) Πότε το σύστημα είναι ευσταθές (στάσιμο); Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή (p_n) του αριθμού των πελατών στο σύστημα $\{Q(t)\}$.

(β) Στην περίπτωση που ισχύει η σχέση $\lambda = c\mu$, να βρεθεί το μακροπρόθεσμο ποσοστό των πελατών που εξυπηρετούνται και οι οριακές κατανομές (r_n) και (d_n) των εμφυτευμένων διαδικασιών $\{Q_n^-\}$ και $\{Q_n^+\}$ του αριθμού των πελατών σε στιγμές πραγματικών αφίξεων και αναχωρήσεων αντίστοιχα (δηλαδή λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τους πελάτες που εισέρχονται τελικά στο σύστημα).

(γ) Να βρεθεί ο μέσος χρόνος παραμονής $E[S]$ ενός πελάτη στο σύστημα, λαμβάνοντας υπόψιν όλους τους πελάτες (είτε εισέρχονται στο σύστημα είτε όχι). Να βρεθεί ο μέσος κύκλος απασχόλησης του συστήματος.

Θέμα 2ο: (3 βαθμοί) Θεωρούμε την M/M/2 ουρά με ομαδικές αφίξεις και μεμονωμένες εξυπηρετήσεις (M^c/M/2). O ρυθμός αφίξεων είναι λ και οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παράμετρο μ. Κάθε αφικνούμενη ομάδα αποτελείται από 1 ή 2 πελάτες με πιθανότητα 1/2. Έστω $\{Q(t)\}$ η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των πελατών .

(α) Να αιτιολογήσετε γιατί η $\{Q(t)\}$ είναι Μαρκοβιανή αλυσίδα συνεχούς χρόνου, κάνοντας πίνακα των άμεσα δυνατών μεταβάσεων και των αντίστοιχων χρόνων.

(β) Να υπολογίσετε την πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής (p_n) της $\{Q(t)\}$ συναρτήσει των λ, μ και p_0.

(γ) Να βρεθεί η συνθήκη ευστάθειας του συστήματος και να υπολογιστεί η p_0.

Θέμα 3ο: (2 βαθμοί) Θεωρούμε μια $M/M/\infty$ ουρά με ομαδικές αφίξεις με ρυθμό αφίξεων ομάδων λ, γεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας μεγέθους αφικνούμενων ομάδων $g_j = (1-a)a^{j-1}$, $j = 1,2,...$ και ρυθμό εξυπηρέτησης μ. Να βρεθεί η πιθανογεννήτρια $P(z)$ της στάσιμης κατανομής του αριθμού των πελατών της, το μέσο πλήθος πελατών στο σύστημα και η πιθανότητα κενού συστήματος.

Θέμα 4ο: (3 βαθμοί) Θεωρούμε ένα δίκτυο Jackson με 2 ουρές. Η ουρά 1 έχει εξωτερικές αφίξεις σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ, ενώ η ουρά 2 δεν έχει εξωτερικές αφίξεις. Οι αναχωρήσεις από την ουρά 1 κατευθύνονται προς την ουρά 2 με πιθανότητα 1 ενώ οι αναχωρήσεις από την ουρά 2 κατευθύνονται στην ουρά 1 με πιθανότητα p και φεύγουν από το δίκτυο με πιθανότητα q ($p+q=1$). Η ουρά 1 έχει άπειρους υπηρέτες ενώ η ουρά 2 έχει 1 υπηρέτη και άπειρο χώρο αναμονής. Οι χρόνοι εξυπηρέτησης είναι εκθετικοί με παραμέτρους μ_1, μ_2 για τις ουρές 1, 2 αντίστοιχα.

(α) Να βρεθεί πότε το δίκτυο είναι ευσταθές και στην περίπτωση αυτή να υπολογιστεί η στάσιμη κατανομή του.

(β) Έστω ότι ένας πελάτης βρίσκει το δίκτυο στην κατάσταση (n_1, n_2) (n_i πελάτες στην ουρά i, i=1,2) κατά την άφιξή του σε αυτό. Να βρεθούν ο μέσος αριθμός φορών που θα επισκεφθεί το σταθμό 2 και οι μέσοι αριθμοί πελατών στους σταθμούς 1, 2 αμέσως μετά τη στιγμή της πρώτης αναχώρησής του από το σταθμό 1.

Διάρκεια εξέτασης : 2 ώρες και 30 λεπτά. **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

Να γραφούν και τα 4 θέματα