ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, 23-6-1997 (1)

1. Έστω $(X,Y)'$ μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = 2/\theta^2, \quad 0 < x \le y < \theta, \quad (\theta > 0).$$

Να υπολογισθούν (α) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{Y|X}(y\,|\,x)$, (β) η συνδιακύμανση $C(X,Y)$ και ο συντελεστής συσχέτισης $\rho(X,Y)$ και (γ) η καμπύλη παλινδρόμησης $y = m_{Y|X}(x)$ και η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y στη X.

2. (α) Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες και κατανέμονται ομοιόμορφα στα διαστήματα $[-\theta,0]$ και $[0,\theta]$, αντίστοιχα, να υπολογισθεί η πιθανότητα $P(Y - X \le \theta/2)$.

(β) Έστω X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια εκθετική συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(t) = f_Y(t) = \theta e^{-\theta t}, \quad 0 < t < \infty \quad (0 < \theta < \infty).$$

(β1) Να υπολογισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της διαφοράς $W = X - Y$.

(β2) Να εξετασθεί κατά πόσον οι τυχαίες μεταβλητές $Z = X + Y$ και $U = X/(X+Y)$ είναι ανεξάρτητες.

3. Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία ν ρίψεων δύο διακεκριμένων νομισμάτων και έστω X ο αριθμός εμφανίσεων διπλών κεφαλών και Y ο αριθμός εμφανίσεων διπλών γραμμάτων. Να υπολογισθούν (α) η συνάρτηση πιθανότητας $f_{X,Y}(x,y) = P(X = x, Y = y)$, $x, y = 0,1,\ldots$, (β) η πιθανογεννήτρια $P_{X,Y}(t,u)$ της τ.μ. $(X,Y)'$ και οι παραγοντικές ροπές $\mu_{(r,s)} = E[(X)_r(Y)_s]$, $r,s = 0,1,\ldots$ και (γ) η συνάρτηση πιθανότητας του αθροίσματος $Z = X + Y$.

4. (α) Έστω $X_1, X_2, \ldots$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με μέση τιμή $E(X_i) = \mu_i$, διασπορά $V(X_i) = \sigma_i^2 \le c < \infty$, $i = 1,2,\ldots$ και συνδιακύμανση $C(X_i, X_j) = c_{ij} < 0$, $i,j = 1,2,\ldots$, $i \ne j$. Δείξτε ότι η ακολουθία $\overline{X}_\nu - \overline{\mu}_\nu$, $\nu = 1,2,\ldots$, όπου $\overline{X}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} X_i$, $\overline{\mu}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}\mu_i$, $\nu = 1,2,\ldots$, συγκλίνει στοχαστικά στο μηδέν.

(β) Σε μία πόλη 10.000 κατοίκων έστω ότι 20 άτομα την ημέρα κατά μέσο όρο χρειάζεται να εισαχθούν στο νοσοκομείο για εξετάσεις. Να υπολογισθεί (προσεγγιστικά) ο μικρότερος αριθμός των ελεύθερων κρεβατιών που πρέπει να διαθέτει ημερησίως το νοσοκομείο για να είναι σε θέση να εξυπηρετεί την πόλη με πιθανότητα τουλάχιστο 0,99. $(\Phi(2{,}33) = 0{,}99,\ \Phi(1{,}96) = 0{,}975)$.

Από τα 4 θέματα να γραφούν τα 3 σε 2 ½ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ