

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, ΙΟΥΝΙΟΣ 1998

1. Έστω (X, Y) μία διακριτή διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{15}, \quad x = 1, 2, \dots, y, \quad y = 1, 2, \dots, 5.$$

Να υπολογισθούν (α) οι περιθώριες και οι δεσμευμένες συναρτήσεις πιθανότητας $f_X(x)$, $f_Y(y)$, $f_{X|Y}(x|y)$, (β) η συνδιακύμανση $C(X, Y)$ και (γ) η καμπύλη παλινδρόμησης $x = m_{X|Y}(y)$. (δ) Συμπεράνετε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της X στην Y .

2. (α) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$, αντίστοιχα, να προσδιορισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της τυχαίας μεταβλητής $Z = X + Y$.

(β) Οι χρόνοι αναμονής X και Y δύο πελατών ενός καταστήματος είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_X(t) = f_Y(t) = e^{-t}, \quad 0 < t < \infty.$$

Να υπολογισθεί η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών $Z = X + Y$ και $W = X/(X + Y)$. (γ) Να προσδιορισθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των τυχαίων μεταβλητών Z και W και να εξετασθεί κατά πόσον είναι ανεξάρτητες.

3. (α) Έστω $X_k, k = 1, 2, \dots$ είναι μία ακολουθία ανεξαρτήτων και ισοδύμων (με την ίδια κατανομή) τυχαίων μεταβλητών και $S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$, όπου η N είναι μία μη αρνητική ακεραία τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη από τις $X_k, k = 1, 2, \dots$. Δείξτε ότι $E(S_N) = E(N)E(X)$ και $V(S_N) = E(N)V(X) + V(N)[E(X)]^2$.

(β) Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Υπολογίστε τη ροπογεννήτρια $M(t)$ αυτής όπου υπάρχει και συμπεράνετε τις ροπές $\mu_r = E(X^r), r = 1, 2, \dots$

4. (α) Έστω μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών και X_k ο αριθμός επιτυχιών στην k δοκιμή $k = 1, 2, \dots$ με $P(X_k = 1) = p_k, P(X_k = 0) = 1 - p_k, k = 1, 2, \dots$. Δείξτε ότι

η ακολουθία $\bar{X}_v - \bar{p}_v$, όπου $\bar{X}_v = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v X_k, \bar{p}_v = \frac{1}{v} \sum_{k=1}^v p_k, v = 1, 2, \dots$, συγκλίνει

στοχαστικά στο μηδέν.

(β) Ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών μιας σελίδας συγκεκριμένης εφημερίδας ακολουθεί την κατανομή Poisson με $\lambda = 1$. Αν η εφημερίδα έχει 60 σελίδες ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 30 σελίδες να μην έχουν τυπογραφικά λάθη;

Απαντήστε σε 3 από τα 4 θέματα σε 2 ½ ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ