ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, Σεπτέμβριος 2000

Θέμα 1ο: Έστω $(X,Y)'$ μια συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x,y) = 2x(x-y), \quad |y| < x < 1$$

Να υπολογισθούν (α) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{Y|X}(y\,|\,x)$ και (β) η καμπύλη (μέσης) παλινδρόμησης $y = m_{Y|X}(x)$. Να δειχθεί ότι (γ) οι τυχαίες μεταβλητές X και Y δεν είναι ανεξάρτητες ενώ (δ) οι τυχαίες μεταβλητές X και $W = X - Y$ είναι ανεξάρτητες.
δεν

Θέμα 2ο: Έστω ότι από μια κληρωτίδα που περιέχει 5 σφαιρίδια φέροντα τους αριθμούς $0,1,2,3$ και 4 εξάγονται διαδοχικά με επανάθεση 2 σφαιρίδια. Αν X είναι ο αριθμός που εξάγεται στην πρώτη δοκιμή (εξαγωγή) και Y ο μικρότερος από τους δύο αριθμούς που εξάγονται, να υπολογισθούν (α) η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας, (β) οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας και (γ) η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Θέμα 3ο: (α) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες διακριτές τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πιθανότητας

$$f_X(x) = (x+1)p_1^2 q_1^x, \quad x = 0,1,2,\ldots, \quad q_1 = 1 - p_1 \quad (0 < p_1 < 1)$$

$$f_Y(y) = p_2 q_2^y, \quad y = 0,1,2,\ldots, \quad q_2 = 1 - p_2 \quad (0 < p_2 < 1)$$

να υπολογισθεί η συνάρτηση πιθανότητας του αθροίσματος $Z = X + Y$.

(β) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{5}e^{-x/5}, \quad 0 < x < \infty, \quad f_Y(y) = \frac{1}{5}e^{-y/5}, \quad 0 < y < \infty$$

να υπολογισθεί η συνάρτηση πυκνότητας της διαφοράς $W = X - Y$.

ν₂ (γ) Αν X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|} \quad -\infty < x < \infty$$

υπολογίστε τη ροπογεννήτρια $M_X(t)$ όπου αυτή υπάρχει και συμπεράνετε τις ροπές $\mu_r' = E(X^r)$, $r = 1,2,\ldots$.

Θέμα 4ο: (α) Έστω μία ακολουθία ανεξάρτητων δοκιμών και X_κ ο αριθμός επιτυχιών στην κ δοκιμή $\kappa = 1,2,\ldots$ με $P(X_\kappa = 1) = p_\kappa$, $P(X_\kappa = 0) = 1 - p_\kappa$, $\kappa = 1,2,\ldots$.

Δείξετε ότι η ακολουθία $\bar{X}_\nu - \bar{p}_\nu$, όπου $\bar{X}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} X_\kappa$, $\bar{p}_\nu = \frac{1}{\nu}\sum_{\kappa=1}^{\nu} p_\kappa$, $\nu = 1,2,\ldots$, συγκλίνει στοχαστικά στο μηδέν. (β) Ο αριθμός των τυπογραφικών λαθών μιας σελίδας συγκεκριμένης εφημερίδας ακολουθεί την κατανομή Poisson με $\lambda = 0{,}7$. Αν η εφημερίδα έχει 64 σελίδες ποια είναι η πιθανότητα τουλάχιστον 36 σελίδες να μην έχουν τυπογραφικά λάθη;

Δίνονται: $e^{-0,7} \cong 1/2$, $\Phi(1) = 0{,}8413$, $\Phi(2) = 0{,}9546$ 12,6 2,86

Από τα 4 θέματα να γραφούν τα 3. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ