

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΙΙ, Σεπτέμβριος 1998

Θέμα 1ο: Έστω (X, Y) μία συνεχής διδιάστατη τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{2}{9}, \quad 0 < x \leq y < 3.$$

Να υπολογισθούν (α) οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x)$ και $f_Y(y)$ και η συνδιακύμανση $C(X, Y)$, (β) η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας $f_{Y|X}(y|x)$ και η καρπύλη παλινδρόμησης της Y στη X και (γ) η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y στη X .

Θέμα 2ο: (α) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με γεωμετρικές συναρτήσεις πιθανότητας:

$$f_X(x) = p_1 q_1^x, \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad q_1 = 1 - p_1 \quad (0 < p_1 < 1)$$

$$f_Y(y) = p_2 q_2^y, \quad y = 0, 1, 2, \dots, \quad q_2 = 1 - p_2 \quad (0 < p_2 < 1)$$

να υπολογισθούν οι συναρτήσεις πιθανότητας του αθροίσματος $Z = X + Y$ και της διαφοράς $W = X - Y$.

(β) Αν X και Y είναι ανεξάρτητες συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1, \quad f_Y(y) = ye^{-y^2/2}, \quad 0 < y < \infty$$

να υπολογισθεί η συνάρτηση πυκνότητας του γινομένου $Z = XY$.

Θέμα 3ο: Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία n ρίψεων δύο διακεκρμένων κύβων και έστω X αριθμός εμφανίσεων ζεύγους περιττών αριθμών και Y ο αριθμός εμφανίσεων ζεύγους άρτιων αριθμών. Να υπολογισθούν (α) οι συναρτήσεις πιθανότητας $f_{X,Y}(x, y)$ της (X, Y) και $f_Z(z)$ του αθροίσματος $Z = X + Y$, (β) η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $f_{Y|X}(x|y)$ της Y δεδομένης της X και (γ) η δεσμευμένη συνάρτηση πιθανότητας $f_{X|Z}(x|z)$ της X δεδομένης της Z .

Θέμα 4ο: (α) Έστω ότι ποσοστό $p = 0,36$ των ψηφοφόρων μιας πόλης υποστηρίζουν τον υποψήφιο A για δήμαρχο. Σε μία δειγματοληπτική έρευνα που γίνεται πριν από τις εκλογές, πόσοι ψηφοφόροι πρέπει να ρωτηθούν έτσι ώστε το ποσοστό αυτών που υποστηρίζουν τον A να διαφέρει του πραγματικού ποσοστού το πολύ 2% με πιθανότητα τουλάχιστο 0,95.

(β) Έστω ότι η (X, Y) ακολουθεί τη διδιάστατη κανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu_X = 50$, $\mu_Y = 45$, $\sigma_X = 5$, $\sigma_Y = 4$ και $\rho > 0$. Αν $P(44 < X \leq 56 | Y = 45) = 0,954$ να υπολογισθεί ο συντελεστής συσχέτισης ρ .

$$\text{Δίδονται: } X | Y = y \sim N\left(\mu_X + \rho \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} (y - \mu_Y), \sigma_X^2 (1 - \rho^2)\right)$$

$$\Phi(1,96) = 0,975, \quad \Phi(2) = 0,977.$$

Απαντήστε σε 3 από τα 4 θέματα σε 2 ½ ώρες. ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ