Πραγματική Ανάλυση Ι 21-06-2004

Θέμα 1. α) Δώστε τον ορισμό του ανοικτού συνόλου και αποδείξτε, από τον ορισμό, ότι κάθε ανοικτή σφαίρα είναι ανοικτό σύνολο και κάθε κλειστή σφαίρα είναι κλειστό σύνολο.
β)Έστω X μ.χ. και Υ πυκνός υπόχωρος του X. Αν ο Υ είναι φραγμένος (αντ. διαχωρίσιμος), είναι τότε και ο X φραγμένος (αντ. διαχωρίσιμος);

Θέμα 2. α) Διατυπώστε το Θεώρημα *Cantor* που χαρακτηρίζει τους πλήρεις μετρικούς χώρους. Με τη βοήθεια αυτού αποδείξτε ότι αν ρ είναι μετρική στον $\mathbb{R}$ ισοδύναμη με τη συνήθη μετρική ώστε ο ($\mathbb{R}$,ρ) να είναι πλήρης, τότε υπάρχει $r > 0$ ώστε δ($[n,\infty)$)$\geq r$ για κάθε $n = 1, 2, ...$ (όπου δ($[n,\infty)$) η διάμετρος του $[n,\infty)$ ως προς ρ).
β) Αποδείξτε ότι ο μετρικός χώρος (B(X),ρ), όπου X μη κενό σύνολο, B(X)=$\{f$:X$\to\mathbb{R}$, f φραγμένη$\}$ και ρ(f,g)=$sup\{|f(x) - g(x)|$:$x\in$X$\}$ για κάθε $f, g\in$B(X), είναι πλήρης.

Θέμα 3. α) Αποδείξτε ότι κάθε συμπαγής μ.χ είναι ολικά φραγμένος και ότι κάθε ολικά φραγμένος μ.χ. είναι διαχωρίσιμος.
β)Δώστε παραδείγματα που να δείχνουν ότι τα αντίστροφα στο α) δεν ισχύουν.

Θέμα 4. α) Έστω X συμπαγής μ.χ., $f_n : X \to\mathbb{R}, n = 1, 2, ...,$ ισοσυνεχής ακολουθία συναρτήσεων και $f : X \to\mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο. Αποδείξτε πλήρως ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα.
β) Αν f, g :[0,1]$\to\mathbb{R}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις ώστε $\int_0^1 x^n f(x)dx=\int_0^1 x^n g(x)dx$ για $n = 0, 1, 2, ...,$ αποδείξτε ότι $f = g$.

Θέμα 5. Έστω X,Υ μ.χ και $f : X \to$Υ συνάρτηση επί.
α) Αν ο X είναι συμπαγής και η f συνέχής, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
β) Αν ο X είναι ολικά φραγμένος και η f ομοιόμορφα συνεχής, τότε ο Υ είναι ολικά φραγμένος.

Θέμα 6. α) Έστω (X,ρ) μ.χ., A,B$\subseteq$X μη κενά με A κλειστό και B συμπαγές ώστε d(A,B)=0. αποδείξτε ότι $A \cap B \neq \emptyset$.
β) Έστω ρ μετρική στο $\mathbb{R}$ ώστε κάθε αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ναι είναι κλειστό στον ($\mathbb{R}$,ρ). Αποδείξτε ότι (i) κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι κλειστό στον ($\mathbb{R}$,ρ) και (ii) η ρ είναι ισοδύναμη με τη διακριτή μετρική.

Θέμα 7. α) Έστω G_n,$n = 1, 2, ...$ ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το σύνολο $\bigcap G_n, n \in \mathbb{N}$ είναι υπεραριθμήσιμο [**Υπόδειξη**: Θυμηθείτε την απόδειξη ότι το σύνολο των ρητών δε γράφεται ως αριθμήσιμη τομή ανοικτών συνόλων].

β) Εξετάστε ποιοί από τους παρακάτω υποχώρους του $\mathbb{R}$ είναι πλήρεις (πλήρης αιτιολόγηση):
(i) $[0,\infty)$, (ii) $[0,1]$, (iii) $(0,1]$, (iv) $\mathbb{Q}$ και (v) $\mathbb{Z}$.