ΠΡΟΒΟΛΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2001

ΘΕΜΑ 1. **α**) Τί λέει η Αρχή του Δυϊσμού και ποία είναι η σημασία της για την Προβολική Γεωμετρία; Ισχύει η Αρχή αυτή στο Συσχετισμένο επίπεδο; (Δικαιολογήστε την απάντηση).
β) Να αποδείξετε **χωρίς** τη χρήση της Αρχής του Δυϊσμού, ότι από κάθε σημείο του Π.Ε. διέρχονται τουλάχιστον 3 διαφορετικές ευθείες.
γ) Να δείξετε ότι κάθε κεντρική/αξονική συγγραμμικότητα, διάφορη της ταυτοτικής, έχει ακριβώς ένα κέντρο.
δ) Ποιά είναι η γεωμετρία του Klein; Αναφέρατε ένα παράδειγμα με το οποίο φαίνεται η σημασία της στη δομή ενός Π.Ε. .

ΘΕΜΑ 2. **α**) Σε ένα Π.Ε. $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \in)$ θεωρούμε την ομάδα των ομολογιών $\mathbb{H}(\mathrm{A}, \mathrm{K})$, Α (Α $\notin$ Κ) και μια συγγραμμικότητα (στ) $\in \mathcal{A}ut(\mathcal{P})$. Θέτουμε $\mathcal{B} := \sigma(\mathrm{A})$ και $\ell := \tau(\mathrm{K})$. Να δείξετε ότι:
1. Έχει έννοια η ομάδα $\mathbb{H}(\mathrm{B}, \ell)$.
2. Αν $(\varphi,\psi) \in \mathbb{H}(\mathrm{A}, \mathrm{K})$, τότε $(\varsigma,\tau)\circ(\varphi,\psi)\circ(\varsigma,\tau)^{-1} \in \mathbb{H}(\mathrm{B}, \ell)$.
3. Αν θέσουμε $\mathcal{F}((\varphi,\psi)) := (\varsigma,\tau)\circ(\varphi,\psi)\circ(\varsigma,\tau)^{-1}$, η $\mathcal{F}$ ορίζει έναν ισομορφισμό ομάδων μεταξύ των $\mathbb{H}(\mathrm{A}, \mathrm{K})$, και $\mathbb{H}(\mathrm{B}, \ell)$.

β) Αν (φ_1,ψ_1) και (φ_2,ψ_2) είναι στοιχεία του $\mathbb{H}([1,0,0],<1,0,0>)$ και M_1, M_2 οι αντίστοιχοι πίνακές τους, να δείξετε ότι ο πίνακας της $(\varphi_1,\psi_1)\circ(\varphi_2,\psi_2)$ είναι ο $\mathrm{M}_1 \cdot \mathrm{M}_2 = \mathrm{M}_2 \cdot \mathrm{M}_1$.

ΘΕΜΑ 3. **α**) Δίνεται η απεικόνιση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $f(a, b, c) := (a, b, \lambda a + c)$, όπου λ δοσμένο (σταθερό) στοιχείο του $\mathbb{R}_* \equiv \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Να δείξετε ότι η f ορίζει μια συγγραμμικότητα του $\mathbb{P}_2$. Επίσης, να δείξετε ότι έχει κέντρο το σημείο [0,0,1] και άξονα την ευθεία <1,0,0>. Τί είδους συγγραμμικότητα είναι η (φ,ψ);
β) Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι κάθε $(\varphi,\psi) \in \mathbb{E}([1,0,0],<1,0,0>)$ αντιστοιχεί σε έναν πίνακα (ποιόν;), να δικαιολογήσετε, **χωρίς αποδείξεις** γιατί στην προηγούμενη ομάδα $\mathbb{E}([1,0,0],<1,0,0>)$ ισχύει η σχέση $(\varphi_1,\psi_1)\circ(\varphi_2,\psi_2)=(\varphi_2,\psi_2)\circ(\varphi_1,\psi_1)$.