ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΙΙ

Γραπτή εξέταση της 17/9/98

Δίδονται πέντε θέματα που είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Καλείστε να τα λύσετε όλα για να πάρετε άριστα, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις.

Καλή σας επιτυχία.

Ο διδάσκων.
Ι. Μπάκας
Καθηγητής Φυσικής.

ΘΕΜΑ 1: Ένας τριδιάστατος στερεός στροφέας περιγράφεται από τη Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2I_1} L_x^2 + \frac{1}{2I_2} L_y^2 + \frac{1}{2I_3} L_z^2$$

Να ευρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\hat{H}$ όταν $l=1$. Στη συνέχεια να εξειδικεύσετε το αποτέλεσμα για τις ειδικές περιπτώσεις ενός αξονικά συμμετρικού στροφέα $(I_1 = I_2)$ και ενός σφαιρικά συμμετρικού στροφέα $(I_1 = I_2 = I_3)$.

(Γνωρίζετε ότι για τις σφαιρικές αρμονικές ισχύει

$$L_\pm Y_l^m = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}\; Y_l^{m \pm 1}$$

όπου $L_\pm = L_x \pm i L_y$).

ΘΕΜΑ 2: Σε προβλήματα με κεντρικές δυνάμεις η Hamiltonian γράφεται ως

$$H = \frac{1}{2\mu} p_r^2 + \frac{1}{2\mu r^2} \vec{L}^2 + V(r)$$

όπου $p_r = \frac{1}{r}(\vec{r} \cdot \vec{p})$. Να δείξετε ότι ο τελεστής $\hat{p}_r = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)$ είναι Ερμιτιανός, ενώ ο $-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}$ δεν είναι, προκειμένου να ικανοποιείται η εξίσωση του Schrödinger σε σφαιρικές συντεταγμένες. Επίσης να

Δικαιολογήσετε γιατί στις λύσεις της μορφής $\psi(r,\theta,\varphi)=\frac{u(r)}{r}Y_{\ell}^{m}(\theta,\varphi)$ θέτουμε την οριακή συνθήκη $u(r=0)=0$.

<u>ΘΕΜΑ 3</u>: Να υπολογίσετε τη ποσότητα $\Delta x \cdot \Delta p$

(i) για τις καταστάσεις $|n\rangle$ του χώρου Fock με $n=0,1,2,\ldots$

(ii) για το σύνολο των σύμφωνων καταστάσεων

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2}\, e^{zA^{+}}|0\rangle$$, όπου z είναι μια αυθαίρετη μιγαδική παράμετρος.

(Γνωρίζετε ότι οι τελεστές δημιουργίας – καταστροφής ορίζονται ως $A^{+}=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x - i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$, $A=\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x + i\frac{p}{\sqrt{2m\omega\hbar}}$.

Επίσης $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(A^{+})^{n}|0\rangle$ για τις οποίες ισχύει ότι $\langle m|n\rangle = \delta_{n,m}$.

<u>ΘΕΜΑ 4</u>: Δύο σωματίδια με spin 1/2 αλληλεπιδρούν με δυναμικό διπολικής μορφής $\frac{1}{\hbar^2}V(r)\left[3\frac{(\vec{S}_1\cdot\vec{r})(\vec{S}_2\cdot\vec{r})}{r^2}-\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2\right]$

Να δείξετε ότι $3\frac{(\vec{S}_1\cdot\vec{r})(\vec{S}_2\cdot\vec{r})}{r^2}-\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2=\frac{1}{2}\left[3\frac{(\vec{S}\cdot\vec{r})^2}{r^2}-\vec{S}^2\right]$

όπου $\vec{S}$ είναι ο <u>τελεστής συνολικού spin του συστήματος</u>.

Στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη τιμή του δυναμικού όταν το σύστημα βρίσκεται σε πλήρως αντισυμμετρική κατάσταση spin.

κατάσταση του spin.

<u>ΘΕΜΑ 5</u> : Θεωρείστε ένα σωμάτιο μάζας m που κινείται σε μία χωρική διάσταση υπό την επίδραση του δυναμικού Morse $V(r) = V_0\left(e^{-2\frac{r-r_0}{R}} - 2e^{-\frac{r-r_0}{R}}\right)$ όπου V_0, r_0 και R είναι τρεις θετικές παράμετροι με R πολύ μεγάλο. Να δείξετε με τη βοήθεια της θεωρίας των διαταραχών ότι οι πρώτες ενεργειακές στάθμες του προβλήματος προσδιορίζονται ως

$$E_n = -V_0 + \frac{\hbar}{R}\sqrt{\frac{2V_0}{m}}\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{\hbar^2}{2mR^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots$$

όπου .... συμβολίζουν όρους ανώτερης τάξης ως προς $\frac{\hbar}{R}$.

(Γνωρίζετε ότι στα πλαίσια της θεωρίας των διαταραχών οι ιδιοτιμές της Hamiltonian $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \lambda x^3$ δίδονται από $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{8}g^2\hbar\omega\left(30n^2+30n+11\right)+\cdots$, όπου $\lambda = g\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{3/2}$. Ομοίως, οι ιδιοτιμές της Hamiltonian $\hat{H} = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \lambda x^4$ δίδονται από $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4}g\hbar\omega\left(2n^2+2n+1\right) - \frac{1}{8}g^2\hbar\omega\left(34n^3+51n^2+59n+21\right)+\cdots$, όπου $\lambda = g\hbar\omega\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^2$. Και στις δύο περιπτώσεις η παράμετρος g είναι μικρή αδιάστατη σταθερή)