ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ Ι   Σεπτέμβριος 2005

Θέμα 1ο: α) Έστω $x_1, x_2, ..., x_\nu$ ν παρατηρήσεις μιας τ.μ. X και $\bar{x}$, s_x, δ_x, M_x η δειγματική μέση τιμή, τυπική απόκλιση, διάμεσος και κορυφή αντίστοιχα. Εάν $y_i = \alpha x_i + \beta$, $i = 1,2,\ldots \nu$ είναι οι αντίστοιχες μετασχηματισμένες τιμές με $\alpha, \beta \in \Re$, να **υπολογιστούν** τα $\bar{y}$, s_y, δ_y και M_y.

β) Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2)$ και $T = c\sum_{i=1}^{\nu}(X_i - \bar{X})^2$ μια εκτιμήτρια της παραμέτρου σ^2 (με μ άγνωστο). Να **βρεθεί** η σταθερά c σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις έτσι ώστε

i) Η T να είναι α.ε. του σ^2
ii) Η T να είναι συνεπής εκτιμήτρια του σ^2
iii) Η T να είναι ε.μ.π. του σ^2
iv) Να ελαχιστοποιείται το μέσο τετραγωνικό σφάλμα της T ως εκτιμήτριας του σ^2.

Θέμα 2ο: α) Αν X είναι μία τ.μ. της εκθετικής οικογένειας κατανομών με σ.π.

$$f(x \mid \theta) = e^{-B(\theta)+\eta(\theta)T(x)}h(x)$$

να δειχθεί ότι

$$E[T(X)] = \frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)} \text{ και } V[T(X)] = \left(\frac{B'(\theta)}{\eta'(\theta)}\right)' \frac{1}{\eta'(\theta)}.$$

β) Έστω $X_1 = X$ ένα τ.δ. μιας παρατήρησης από τη δίτιμη Bernoulli $b(1, p)$ με συνάρτηση πιθανότητας

$$x = 0,1,\ 0 < p < 1.$$

Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει α.ε. της παραμετρικής συνάρτησης $g(p) = p^2$ η οποία να βασίζεται στην παρατήρηση X.

Θέμα 3ο: Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τ.δ. από τη διωνυμική κατανομή $B(N, p)$ με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x \mid p) = \binom{N}{x} p^x (1-p)^{N-x},\ x = 0,1,\ldots,N$$

όπου $0 < p < 1$ άγνωστη παράμετρος και N γνωστός θετικός ακέραιος.
α) Να βρεθεί α.ε.ε.δ. του p και αφού υπολογιστεί το κάτω φράγμα διασποράς κατά Cramer-Rao να εξετασθεί η αποτελεσματικότητά της. Είναι αυτή συνεπής εκτιμήτρια;
β) Να βρεθούν η ε.μ.π. και η εκτιμήτρια ροπών της παραμέτρου p.

Θέμα 4ο: Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τ.δ. από την ομοιόμορφη κατανομή $U(-\theta, \theta)$. Αφού δείξετε ότι η σ.σ.

$$T = \max\{|X_i| : 1 \le i \le \nu\}$$

είναι επαρκής σ.σ για την παράμετρο θ, να κατασκευαστεί στη συνέχεια δ.ε για το θ με συντελεστή εμπιστοσύνης $1 - a$.
β) Έστω $X_1, X_2, ..., X_\nu$ τ.δ. από την κατανομή Weibull με σ.π.

$$f(x \mid \theta) = \beta\theta x^{\beta-1}e^{-\theta x^\beta},\ x > 0$$

όπου β γνωστή θετική σταθερά και $\theta > 0$ άγνωστη παράμετρος. Να βρεθεί ο ΟΙΕ σε επίπεδο σημαντικότητας a της $H_0 : \theta = \theta_0$ κατά της $H_1 : \theta < \theta_0$
και να βρεθεί η ισχύς του ελέγχου για $\theta = \theta_1 < \theta_0$.

Να γραφούν και τα 4 θέματα